OPCIÓN A

Problema A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y $2B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que la matriz A es invertible (2 *puntos*)
y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I. (2 *puntos*)

b) Los valores posibles del determinante de B. (3 *puntos*)

c) El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa. (3 *puntos*)

Problema A.2. Se dan la recta $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y + mz = n$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. (3 *puntos*)

b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. (3,5 *puntos*)

c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π. (3,5 *puntos*)

Problema A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes de coordenadas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. (1+2 *puntos*)

b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. (3 *puntos*)

c) Calcular, en función del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$. (2 *puntos*)

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (2 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1}. (2+2 *puntos*)

b) La justificación de que $A^4 = I$. (2 *puntos*)

c) El cálculo de las matrices A^7, A^{30} y A^{100}. (4 *puntos*)

Problema B.2. Se dan la recta $r:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x-y+bz=0$, siendo a y b dos parámetros reales. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a=-b=1$. (2,5 *puntos*)

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a=b=4$. (2,5 *puntos*)

c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b. (5 *puntos*)

Problema B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O=(0,\ 0)$, $A=(x,\ y)$ y $B=(0,\ y)$, siendo $x>0$, $y>0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo T en función de x. (3 *puntos*)

b) El valor de x para el que dicha área es máxima. (5 *puntos*)

c) El valor de dicha área máxima. (2 *puntos*)