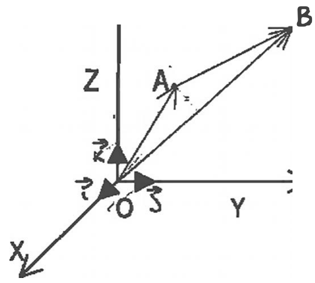


GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Puntos y vectores en el espacio

$A(a_1, a_2, a_3) \in \Re^3$ (punto en el espacio)

$u\ (u_1, u_2, u_3) \in V^3$ (vector en el espacio)

Vector de posición del punto A: $OA = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

Vector definido por dos puntos A y B: $AB = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

Coordenadas del punto medio de un segmento AB: $M = \left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, \dfrac{a_2+b_2}{2}, \dfrac{a_3+b_3}{2}\right)$

Coordenadas del baricentro de un triángulo: $G = \left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}, \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}, \dfrac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$

Módulo de un vector: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

$\vec{u}$ es unitario si $|\vec{u}| = 1$

vector unitario en la dirección $\vec{v}(v_1, v_2, v_3) : \vec{u} = \left(\dfrac{v_1}{|v|}, \dfrac{v_2}{|v|}, \dfrac{v_3}{|v|}\right)$ Cuando no es unitario

Producto escalar:

$$\begin{cases} a)\ \vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \rightarrow \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 \\ b)\ \vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) \rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \\ c)\ \vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|\ proyec_{\vec{u}}\vec{v} = |\vec{v}|\ proyec_{\vec{v}}\vec{u} \end{cases}$$

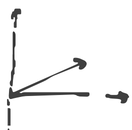
($\vec{u}$ sobre $\vec{v}$) ($\vec{v}$ sobre $\vec{u}$)

Producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$

$\vec{v} \cdot \vec{u}$



$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\,sen(\vec{u},\vec{v})$: Área de un paralelogramo módulo

Producto mixto: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ = Volumen de un paralelogramo

$\dfrac{1}{6}[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \rightarrow$ Volumen del tetraedro

$\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$ producto escalar Ejemplo: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \rightarrow \vec{v} = (0, -u_3, u_2)$

$\vec{v} = (-u_3, 0, u_1)$

$\rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son coplanarios $\leftrightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$

Ecuaciones de rectas y planos

Ecuaciones de la recta

Una recta queda determinada por:

- un punto y un vector director
- dos puntos
- intersección de dos planos

• 3 puntos alineados $A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$ $C(c_1, c_2, c_3)$

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - a_2} = \frac{b_3 - a_3}{c_3 - a_3}$$

a)Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3)$

b)Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1 \\ y=a_2+\lambda v_2 \\ z=a_3+\lambda v_3 \end{cases}$

c)Ecuación continua: $\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}$

d)Ecuación implícita o general: $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$

$Ax+By+Cz=D$

$\dfrac{Ax}{D}+\dfrac{By}{D}+\dfrac{Cz}{D}=1$

$x_1 \quad y_2 \quad z_3$

$V_T=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$

Ecuaciones del plano

Un plano queda determinado por:

- un punto y dos vectores directores
- tres puntos no alineados
- un punto y un vector normal al plano

- dos puntos y un vector

a) Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3)+\beta(u_1,u_2,u_3)\quad \lambda,\beta\in\mathbb{R}$

b) Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1+\beta u_1 \\ y=a_2+\lambda v_2+\beta u_2 \\ z=a_3+\lambda v_3+\beta u_3 \end{cases}$

c) Ecuación implícita o general: $Ax+By+Cz+D=0$ donde $(A,B,C)=\vec{n}\perp\pi$

para encontrar esta ecuación:

-Si nos dan un punto $P\in\pi$ y un vector normal al plano $\to \overrightarrow{PX}.\vec{n}=0$

-Si nos dan un punto $P\in\pi$ y dos vectores directores $\to \begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & & v_3 \end{vmatrix}=0$

Posiciones relaitvas

Posición relativa entre dos rectas

Sean las rectas: r determinada por A y $\vec{v}$; s determinada por B y $\vec{u}$

M= Matriz formada por los vectores $\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}$

a)Si rangM=1 $\to$ r y s coincidentes

b)Si rangM=2 $\to \begin{cases} \vec{u}=\lambda\vec{v}\to \textit{paralelas} \\ \vec{u}\neq\lambda\vec{v}\to \textit{secantes} \end{cases}$

c)Si rangM=3 $\to$ se cruzan

Posición relativa entre recta y plano

Sea la recta r determinada por A y $\vec{v}$, y $\vec{n}$ el vector normal al plano π

a) Si $\vec{v}.\vec{n}\neq 0\to$ la recta y el plano son secantes(tienen 1 pto en común)

(además si $\vec{v}\parallel\vec{n}\to r\perp\pi$)

b) Si $\vec{v}.\vec{n}=0\to \begin{cases} si\ A\in\pi\to r\subset\pi \\ si\ A\notin\pi\to r\parallel\pi \end{cases}$

Posición relativa entre dos planos

Sean $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi'\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$

a) Si $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}=\dfrac{D}{D'}\to coincidentes(S.C.I, r=r'=1)$

b) Si $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}\neq\dfrac{D}{D'}\to paralelos(S.I, r=1, r'=2)$

c) Si $\dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{B}{B'}\,o\,\dfrac{C}{C'}\neq\dfrac{D}{D'}\,o\,\dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{C}{C'}\,o\,\dfrac{B}{B'}\neq\dfrac{C}{C'}\to secantes(se\ cortan\ en\ una\ recta)(S.C.I, r=r'=2)$

- Para calcular el plano que contiene a una recta y es paralelo a otro. cogemos el vector y el punto de la que lo contiene y el vector del paralelo

Posición relativa entre 3 planos

Sean $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0, \pi \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0, \pi \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0$

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Si rang(M)=rang(N)=3 $\rightarrow$ S.C.D $\rightarrow$ Tienen 1 único punto en común
Si rang(M)=rang(N)=2 $\rightarrow$ S.C.I(1parámetro) $\rightarrow$ Los 3 planos tienen 1 recta en común

Si rang(M)=rang(N)=1 $\rightarrow$ S.C.I(2parámetros) $\rightarrow$ Los 3 planos son coincidentes
Si rang(M)=2, rang(N)=3 $\rightarrow$ S.I $\rightarrow$ Los 3 planos son secantes o hay dos paralelos y uno secante a ellos
Si rang (M)=1,rang(N)=2 $\rightarrow$ S.I $\rightarrow$ Los 3 planos son paralelos o hay dos coincidentes y uno paralelo a ellos.

Familias de rectas y planos

Familia de rectas paralelas

$$\begin{cases} x=\alpha+v_1 t \\ y=\beta+v_2 t \\ z=\gamma+v_3 t \end{cases}$$

Familia de planos paralelos

$Ax+By+Cz+\alpha=0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Haz de planos secantes

$\alpha(Ax+By+Cz+D)+\beta(A'x+B'y+C'z+D')=0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$

Propiedades métricas: cálculo de distancias y ángulos

Distancias

Distancia entre dos puntos A y B: $d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

Entre un punto y una recta $d(P,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{P'P}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}, P'\in r$

Entre un punto y un plano $\quad d(P,\pi)\ \dfrac{\left|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D\right|}{\left|\vec{n}\right|}$

Entre dos rectas $\quad : d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{PP'},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}$

Entre una recta y un plano $\quad d(r,\pi)=d(P,\pi),\ P\in r$

Entre dos planos $\quad d(\pi,\pi')=d(P,\pi'), P\in\pi' \longrightarrow$ $Ax+By+C_3+D=0$, $Ax+By+C_3+D'=0$ $\quad = \dfrac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Ángulos

Entre dos rectas $\quad \cos(r,s)=\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$

Entre recta y plano $\quad \operatorname{sen}(r,\pi)=\dfrac{\left|\vec{v}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{v}\right|.\left|\vec{n}\right|}$

Entre dos planos $\quad \cos(\pi,\pi')=\dfrac{\vec{n}.\vec{n}'}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n}'\right|}$

Perpendicularidad

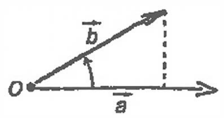
$r\perp s \leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$

$r\perp\pi \leftrightarrow \vec{v}\,\|\,\vec{n} \leftrightarrow \vec{v}=\lambda\vec{n}$

$\pi\perp\pi' \leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{n}' \leftrightarrow \vec{n}.\vec{n}'=0$

Producto escalar

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$



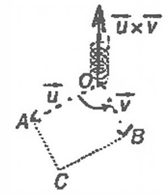
$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\text{proy}_{\vec{b}}(\vec{a})|$$

- Vectores perpendiculares

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

Producto vectorial

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot|\text{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|$$



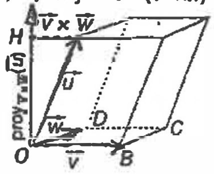
$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\text{área}(OACB)$$

- Vectores linealmente dependientes

$$\vec{u}=k\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\times\vec{v}=0$$

Producto mixto

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$



$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot|\text{proy}_{\vec{v}\times\vec{w}}(\vec{u})|$$

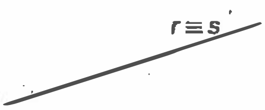
$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|=\text{volumen}$$

- Vectores linealmente dependientes

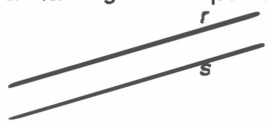
$$\vec{u}=k\vec{v}+k'\vec{w}\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$$

1) Dos rectas r y s en el espacio pueden adoptar las siguientes posiciones relativas:

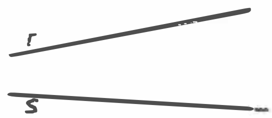
Rectas secantes



Rectas coincidentes



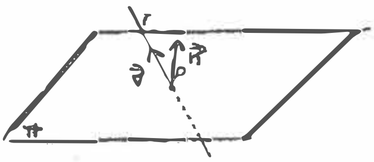
Rectas paralelas



Rectas que se cruzan

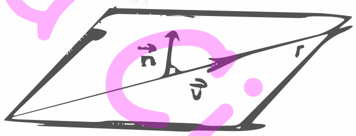
2) Entre un plano π y una recta r se pueden dar tres posiciones relativas:

1. *Secantes*



Recta y plano secantes

2. *Incidentes*

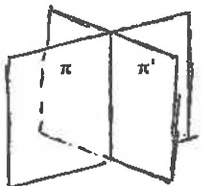


Recta contenida en el plano

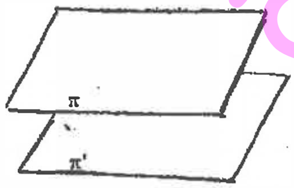
3. *Paralelos*

Recta y plano paralelos

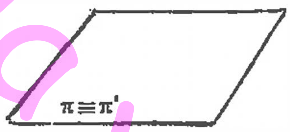
3) Entre dos planos π y π' se pueden dar tres posiciones relativas, que se caracterizan por los puntos comunes a ambos:



Planos secantes
Tienen una recta común



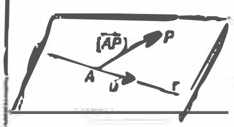
Planos paralelos
No tienen puntos comunes



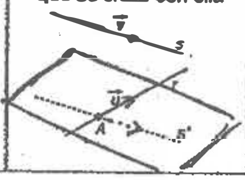
Planos coincidentes
Son el mismo plano

Obtención de rectas y planos

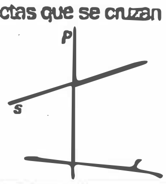
Plano por una recta y un punto exterior a ella



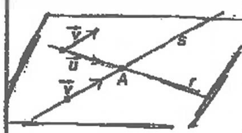
Plano por una recta y paralelo a otra recta que se cruza con ella



Recta por un punto y que corta a otras dos rectas que se cruzan



Plano que contiene dos rectas secantes



Plano que contiene dos rectas paralelas