BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

JUNIO 2011

Problema A.1. Sea el sistema de ecuaciones

$$S: \begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m+1 \\ x + 3y + (m-2)z = m-1 \end{cases},$$

donde m es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

a) Todas las soluciones del sistema S cuando $m = 2$. (*4 puntos*).

b) Todos los valores de m para los que el sistema S tiene una solución única. (*2 puntos*).

c) El valor de m para el que el sistema S admite la solución $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$. (*4 puntos*).

Problema A.2. En el espacio se dan las rectas $r: \begin{cases} x + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$. Obtener **razonadamente**:

a) Un punto y un vector director de cada recta. (*3 puntos*).

b) La posición relativa de las rectas r y s. (*4 puntos*).

c) La ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. (*3 puntos*).

Problema A.3. Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$. Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. (3 *puntos*).

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. (4 *puntos*).

c) La integral $\int f(x)dx = \int \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$. (3 *puntos*).

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$, donde m es un parámetro real.

a) Obtener **razonadamente** el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m. (*5 puntos*).

b) **Explicar** por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$. (*2 puntos*).

c) Obtener **razonadamente** la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m = 1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1}. **Comprobar** que los productos AA^{-1} y $A^{-1}A$ dan la matriz unidad. (*3 puntos*).

Problema B.2. En el espacio se dan las rectas $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ y $s: \{\, x-1 = y = z-3$. Obtener **razonadamente**:

a) Un vector director de cada una de dichas rectas r y s . (*2 puntos*).

b) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0, 1, 3)$. (*3 puntos*).

c) El punto de intersección de las rectas r y s (*2 puntos*) y la ecuación del plano π que contiene a estas rectas r y s . (*3 puntos*).

Problema B.3. Se desea construir un campo rectangular con vértices *A*, *B*, *C* y *D* de manera que:

Los vértices A y B sean puntos del arco de la parábola $y = 4 - x^2$, $-2 \le x \le 2$, y el segmento de extremos *A* y *B* es horizontal.

Los vértices C y D sean puntos del arco de la parábola $y = x^2 - 16$, $-4 \le x \le 4$, y el segmento de extremos *C* y *D* es también horizontal.

Los puntos *A* y *C* deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real positivo *x*.

Los puntos *B* y *D* deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real negativo $-x$.

Se pide obtener **razonadamente**:

a) La expresión $S(x)$ del área del campo rectangular en función del número real positivo x . (*4 puntos*).

b) El número real positivo x para el que el área $S(x)$ es máxima. (*4 puntos*).

c) El valor del área máxima. (*2 puntos*).

Junio 2011

Opción A

1)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=m \\ 2x+3z=2m+1 \\ x+3y+(m-2)z=m-1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{array}\right)$$

A A'

$$|A| = 3+3-9-2m+4 = -2m+4 = 0 \rightarrow m = 2$$

a) $m=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

rango $A=2$

rango $A'=2$

nº incógnitas $=3$

SCI

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$z=\lambda$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 2 & 0 & 5-3\lambda \end{array}\right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5-3\lambda & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-5+3\lambda}{-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2 & 5-3\lambda \end{vmatrix}}{-2} = \frac{5-3\lambda-4+2\lambda}{-2} = \frac{-\lambda+1}{-2}$$

b) $m \neq 2$ rango $A=3$ rango $A'=3$ nº incógnitas $=3 \rightarrow$ SCD

c) $(x,y,z)=\left(3/2,\ -1/2,\ 0\right)$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 2m+1 & 0 & 3 \\ m-1 & 3 & m-2 \end{vmatrix}}{-2m+4}=\frac{6m+3+3m-3-9m-2m^2+4m-m+2}{-2m+4}$$

$$=\frac{-2m^2+3m+2}{-2m+4}=3/2$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=m \rightarrow m=1$$

$$2\cdot\frac{3}{2}+3\cdot 0=2m+1 \rightarrow m=1$$

$$\frac{3}{2}+3\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)+(m-2)\cdot 0=m-1$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{m=1}$$

$$-2m^2+3m+2=-3m+6$$

$$-2m^2+6m-4=0$$

$$m=2$$

$$m=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 2m+1 & 3 \\ 1 & m-1 & m-2 \end{vmatrix}}{-2m+4}=\frac{2m^2-4m+m-2+2m-2+3m-2m-1-3m+3}{-2m+4}$$

$$\frac{-2m^2+4m}{\quad}=\frac{m-2}{-2m+4}=-1/2 \qquad m-2=m-2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-1 \end{vmatrix}}{-2m+4}=\frac{6m+2m+1-6m-3-2m+2}{-2m+4}=\frac{0}{-2m+4}=0$$

2

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

a) $$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 2 \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 3 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$$

$\vec{V_r} = (1, 1, -1)$ $\qquad$ $\vec{V_s} = (1, 2, -1)$

$A = (0, 2, 2)$ $\qquad$ $B = (0, -3, 1)$

b) Posición entre r y s $\quad M(\vec{AB}, \vec{V_r}, \vec{V_s})$ $\quad \vec{AB} = (0, -5, -1)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$|M| = -1 \neq 0$ rango $M = 3$

Las dos rectas se cruzan en un punto.

c) $\pi \begin{cases} r \\ // s \end{cases}$ $\quad \vec{V_r} = \vec{V_\pi} = (1, 1, -1)$ $\quad A_r = A_\pi = (0, 2, 2)$

$\vec{V_s} = \vec{V_\pi} = (1, 2, -1)$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-x + 2z - 4 - y + 2 - z + 2 + 2x + y - 2 = 0$$

$$\pi \equiv \quad x + z - 2 = 0$$

3 $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3x+2}$

a) $x^2-3x+2=0$

$x=2$

$x=1$

$Dom = \mathbb{R} \sim \{1,2\}$

AV $\rightarrow x=1$ y $x=2$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1/0 = \infty$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2/0 = \infty$

AH $\rightarrow y=0$

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$

AO $\rightarrow$ no tiene

b) $f'(x) = \dfrac{(x^2-3x+2) - x(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \dfrac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{(x^2-3x+2)^2} =$

$= \dfrac{-x^2+2}{(x^2-3x+2)^2} = 0 \quad x = \pm\sqrt{2}$

$$\begin{array}{cccccccccc} - & & + & & + & & - & & - \\ & -\sqrt{2} & & 1 & & \sqrt{2} & & 2 & \\ \searrow & & \nearrow & & \nearrow & & \searrow & & \searrow \end{array}$$

Crece: $(-\sqrt{2}, 1) \cup (1, \sqrt{2})$

Decrece: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2) \cup (2, +\infty)$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}\,dx = \int \frac{Ax-2A+Bx-B}{x^2-3x+2}\,dx =$

$\displaystyle= \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ -2A-B=0 \end{array}\right] \begin{array}{l} A = 1-B = -1 \\ -2(1-B)-B=0 \\ -2+2B-B=0 \\ B=2 \end{array}$$

Opción B

1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = -m^3 + m - 2m = -m^3 - m = 0$

$m(-m^2-1) = 0$

$\boxed{m=0}$

$-m^2 - 1 = 0$

$m = \cancel{\exists}$

$m \neq 0$ rango $A = 3$

$m = 0$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ rango $A = 2$

b) Cuando $m = 1$ $|A| \neq 0$, por lo tanto tiene inversa

c) $m = 1$ $|A| = -2$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ +1 & -2 & +1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T_{adj} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & +1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ +1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ $\quad s \equiv x-1 = y = z-3 \Rightarrow \begin{cases} x = \gamma + 1 \\ y = \gamma \\ z = \gamma + 3 \end{cases}$

a) $\vec{v}_r = (1,-1,0)$

$\vec{v}_s = (1,1,1)$

b) $\pi \begin{cases} \perp r \\ C(0,1,3) \end{cases}$ $\quad \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (1,-1,0)$ $\quad x - y + D = 0 \xrightarrow[C]{}$

$0 - 1 + D = 0$

$D = 1$

$\pi \equiv x - y + 1 = 0$

c) $Q\left(\overset{s}{\times}{}^{r}\right)$ $\quad \lambda = \gamma + 1$ $\quad x = 1$

$\pi \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ $\quad 1 - \lambda = \gamma \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ $\quad y = 0$ $\quad Q(1,0,3)$

$3 = \gamma + 3 \rightarrow$ $\quad z = 3$

$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1,-1,0)$

$\vec{v}_s = \vec{v}_\pi = (1,1,1)$

$A_r = A_\pi = (0,1,3)$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$-x + z - 3 + z - 3 - y + 1 = 0 \quad \pi \equiv -x - y + 2z - 5 = 0$

3

$y = 4 - x^2$ $\qquad$ $y = x^2 - 16$

$-2 \leq x \leq 2$ $\qquad$ $-4 \leq x \leq 4$

A y B $\qquad$ C y D

$(x, 4-x^2)$ $\quad$ $(-x, 4-x^2)$ $\qquad$ (x, x^2-16) $\quad$ $(-x, x^2-16)$

a) $S(x) = b \cdot h = 2x(-2x^2+20) = -4x^3+40x$ $\qquad$ $0 < x \leq 2$

$b = d(\vec{DB}) = \sqrt{(-x-x)^2 + (4-x^2-4+x^2)^2} = \sqrt{4x^2} = 2x$

$h = d(\vec{CA}) = \sqrt{(x-x)^2 + (-x^2+16+4-x^2)^2} = \sqrt{(-2x^2+20)^2} = -2x^2+20$

b) $S'(x) = -12x^2+40 = 0$ $\qquad$ $x = -\sqrt{10/3} \rightarrow$ fuera del dominio

$x = \sqrt{10/3}$ $\qquad$ $+ \quad | \quad -$ $\quad$ $\nearrow \sqrt{10/3} \searrow$

c) $S\left(\sqrt{10/3}\right) = 48'694^2$