BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Junio 2010

Problema A.1. Dadas las matrices cuadradas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) Calcular las matrices $(A-I)^2$ y $A(A-2I)$. (*4 puntos*).

b) Justificar razonadamente que

b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $A-2I$. (*2 puntos*).

b.2) No existe matriz inversa de la matriz $A-I$. (*2 puntos*).

c) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica $A^{-1} = \lambda(A-2I)$. (*2 puntos*).

Problema A.2. Dadas las rectas de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 4 \end{cases},$$

se pide:

a) Justificar que las rectas r y s se cruzan. (*4 puntos*).

b) Calcular razonadamente la distancia entre las rectas r y s . (*3 puntos*).

c) Determinar la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s. (*3 puntos*).

Problema A.3. Se quiere construir un estadio vallado de 10000 metros cuadrados de superficie. El estadio está formado por un rectángulo de base x y dos semicírculos exteriores de diámetro x, de manera que cada lado horizontal del rectángulo es diámetro de uno de los semicírculos. El precio de un metro de valla para los lados verticales del rectángulo es de 1 euro y el precio de un metro de valla para las semicircunferencias es de 2 euros. Se pide obtener razonadamente:

a) La longitud del perímetro del campo en función de x . (*3 puntos*).

b) El coste $f(x)$ de la valla en función de x . (*3 puntos*).

c) El valor de x para el que el coste de la valla es mínimo. (*4 puntos*).

OPCIÓN B

Problema B.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales que depende de los parámetros a, b y c

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases},$$

se pide:

a) Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros $a = 0$, $b = -1$ y $c = 2$ el sistema es incompatible. (*3 puntos*).

b) Determinar razonadamente los valores de los parámetros a, b y c, para los que se verifica que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema. (*4 puntos*).

c) Justificar si la solución $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ del sistema del apartado b) es, o no, única. (*3 puntos*).

Problema B.2. Sea r la recta de vector director $(2, -1, 1)$ que pasa por el punto $P = (0, 3, -1)$. Se pide:

a) Hallar razonadamente la distancia del punto $A = (0, 1, 0)$ a la recta r. (*4 puntos*).

b) Calcular razonadamente el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos P y A con la recta r en el punto P. (*4 puntos*).

c) Si Q es el punto donde la recta r corta al plano de ecuación $z = 0$, comprobar que el triángulo de vértices APQ tiene ángulos iguales en los vértices P y Q. (*2 puntos*).

Problema B.3. Dada la función polinómica $f(x) = 4 - x^2$, se pide obtener razonadamente:

a) La gráfica de la curva $y = 4 - x^2$. (2 *puntos*).

b) El punto P de esa curva cuya tangente es perpendicular a la recta de ecuación $x + y = 0$. (3 *puntos*).

c) Las rectas que pasan por el punto $(-2, 1)$ y son tangentes a la curva $y = 4 - x^2$, obteniendo los puntos de tangencia. (5 *puntos*).

Junio 2010

Opción A

1

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $$(A-I)^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(A-2I)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $A^{-1} \longrightarrow |A|=1$

$(A-2I)^{-1} \longrightarrow |A-2I|=-1$

$$A^{-1}=\frac{A^T_{adj}}{|A|}$$

Para que exista la inversa el determinante debe ser diferente de 0.

$(A-I)^{-1} \longrightarrow |A-I|=0$

c) $A^{-1}=\lambda(A-2I)$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda \\ 2\lambda & \lambda & 2\lambda \\ -3\lambda & -3\lambda & -4\lambda \end{pmatrix}$$

$$A_{adj}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & +3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T_{adj}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \lambda=-1$$

2 $r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \end{cases}$ $s = \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 4 \end{cases}$

a) $M(\overrightarrow{AB}, \vec{v_r}, \vec{v_s})$

$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$ $\vec{v_r} = (1, -1, 4)$ $A = (0, 3, -1)$

$$\begin{array}{r} y - z = 4 - 5\lambda \\ - \; -2y - z = -5 - 2\lambda \\ \hline 3y = 9 - 3\lambda \end{array}$$

$3 - \lambda - 4 + 5\lambda = z$

$y = 3 - \lambda$

$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 5)$

$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = +5 + \lambda \\ z = 4 \end{cases}$ $\vec{v_s} = (1, 1, 0)$ $B = (0, +5, 4)$

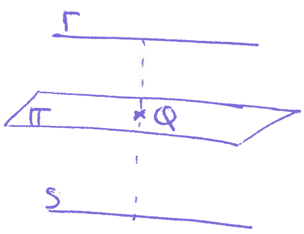
$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $|M| = +18 \neq 0$

rango de $M = 3$, por lo tanto, r y s se cruzan.

b) $d(r,s) = \dfrac{|[\vec{AB}, \vec{v_r}, \vec{v_s}]|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|} = \dfrac{|18|}{\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}} = 18/6 = 3u$

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} + 4\vec{j} + \vec{k} - 4\vec{i} = (-4, 4, 2)$$

c) $\pi \left\{ // \ r \text{ y } s \right.$



$A = (0, 3, -1)$

$B = (0, 5, 4)$

$$Q(M_{AB}) = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = (0, 4, 3/2)$$

$\vec{v_r} = \vec{v_\pi}$

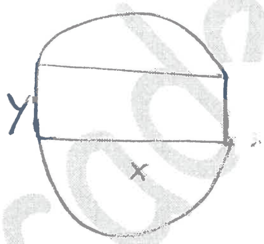
$\vec{v_s} = \vec{v_\pi}$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-4 & z-3/2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$z - \frac{3}{2} + 4y - 16 + z - \frac{3}{2} - 4x = 0$$

$$-4x + 4y + 2z - 19 = 0$$

3 $A = 10000 \, m^2$



Precio vertical 1€/m

Precio circun. 2€/m

a) $L = 2\pi r + 2y$

$r = \dfrac{x}{2}$

$A = \pi r^2 + xy = \pi \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + xy = 10.000$

$$\frac{10.000}{x} - \frac{\pi x^2}{4x} = y$$

$$L = 2\pi \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot \left(\frac{10000}{x} - \frac{\pi x}{4}\right)$$

$$L = (\pi x) + \left(\frac{20000}{x} - \frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\pi x}{2} + \frac{20000}{x}$$

b) $d(x) = 2\pi x + \frac{20000}{x} - \frac{\pi x}{2} = \frac{3\pi x}{2} + \frac{20000}{x}$

c) $d'(x) = \frac{3\pi}{2} - \frac{20000}{x^2} = 0$ $\qquad \frac{3\pi x^2}{2x^2} - \frac{40000}{2x^2} = 0$

$x = \sqrt{\frac{40000}{3\pi}} = 65'15$

$-$ $+$

$\searrow$ $65'15$ $\nearrow$

Opción B

1

$$\left.\begin{aligned} 2ax+by+z&=3c\\ 3x-2by-2cz&=a\\ 5ax-2y+cz&=-4b \end{aligned}\right] \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & b & 1 & 3c\\ 3 & -2b & -2c & a\\ 5a & -2 & c & -4b \end{array}\right)$$

a) $a=0$, $b=-1$, $c=2$

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 6\\ 3 & 2 & -4 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)}_{A}}_{A'}$$

$|A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix} 0 & -1\\ 3 & 2 \end{vmatrix}=3$

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -4\\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=-16$$

rango $A=2$ $\quad$ rango $A'=3$ $\quad$ nº incógnitas $=3$ → SI

b) $(x,y,z)=(1,2,3)$

$$\left.\begin{aligned} 2a+2b+3&=3c\\ 3-4b-6c&=a\\ 5a-4+3c&=-4b \end{aligned}\right] \left.\begin{aligned} 2a+2b-3c&=-3\\ -a-4b-6c&=-3\\ 5a+4b+3c&=4 \end{aligned}\right] \underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -3\\ -1 & -4 & -6 & -3\\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)}_{A}}_{A'}$$

$|A|=-78$

$$a=\frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -3\\ -3 & -4 & -6\\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78}=\frac{-78}{-78}=1$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3\\ -1 & -4 & -3\\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{-78}=\frac{-78}{-78}=1$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3\\ -1 & -3 & -6\\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78}=\frac{78}{-78}=-1$$

rango $A=3$
rango $A'=3$ → SCD
nº incógnitas $=3$
Con una única solución

2 $\quad r\begin{cases}\vec{v_r}=(2,-1,1)\\ P=(0,3,-1)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=2\lambda\\ y=-\lambda+3\\ z=\lambda-1\end{cases}$

a) $d(A,r)=\dfrac{|\vec{AP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}\,u$

$A=(0,1,0)$

$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$

$|\vec{AP}\times\vec{v}|=\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&-2&1\\2&-1&1\end{vmatrix}\right|=|-2\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}+\vec{i}|=|-\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}|$

$\vec{AP}=(0,-2,1)$

$=\sqrt{(-1)^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$

b) $\alpha\begin{cases}s\begin{cases}P\\A\end{cases}\\ r(P)\end{cases}$ $\quad\vec{AP}=(0,-2,1)$

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{AP}\cdot\vec{v_r}}{|\vec{AP}|\,|\vec{v_r}|}=\dfrac{0\cdot2-2\cdot(-1)+1\cdot1}{\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}\,\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}$

$\vec{v_r}=(2,-1,1)$

$\alpha=56'79^\circ$

c) Q

$\sigma\equiv z=0$

$z=0\rightarrow 0=\lambda-1\rightarrow\lambda=1$

$\vec{QA}=(-2,-1,0)$

$\vec{QP}=(-2,1,-1)$

$Q(2\lambda,-\lambda+3,\lambda-1)\xrightarrow{\lambda=1}Q(2,2,0)$

$\cos\beta=\dfrac{\vec{QA}\cdot\vec{QP}}{|\vec{QA}|\,|\vec{QP}|}=\dfrac{-2(-2)-1\cdot(+1)+0(-1)}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+0^2}\;\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{30}}$

$\alpha=\beta$

3 $f(x) = 4 - x^2$

a) Dom $= \mathbb{R}$

$x = 0 \quad y = 4 \qquad (0,4)$

$y = 0 \quad x = \pm 2 \qquad (2,0)$

$(-2,0)$

No tiene asíntotas

$f'(x) = -2x = 0 \qquad x = 0$

$+ \quad | \quad -$

$\nearrow \quad 0 \quad \searrow$

max$_r$ $(0,4)$

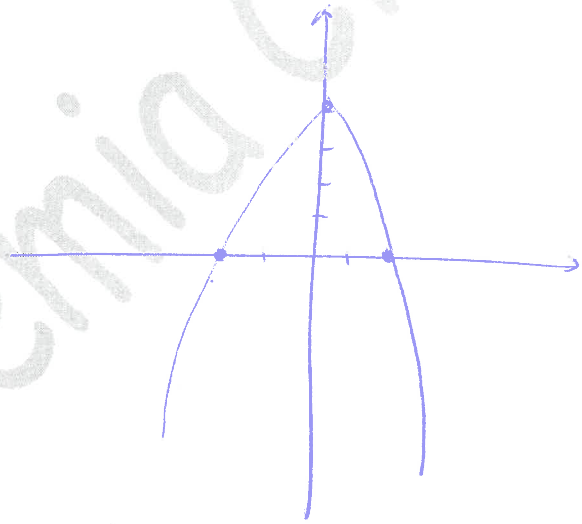
crece $(-\infty, 0)$

decrece $(0, +\infty)$

$f''(x) = -2 \qquad \cap$

$f(-x) = 4 - (-x)^2 = 4 - x^2 = f(x)$

simetría par.



b) $x+y=0$ $\qquad f'(x) = -2x = +1$ $\qquad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$y = -x$ $\qquad x_0 = -1/2$

$y' = -1$ $\qquad y_0 = 4 - (-1/2)^2 = 15/4$ $\qquad P(-1/2, 15/4)$

$m = \frac{-1}{-1} = 1$

c) $(-2,1)$ $\qquad f'(x_T) = -2x_T$ $\qquad y - 1 = -2x_T(x+2)$

(x_0, y_0) $\qquad (x_T, 4 - x_T^2)$ $\qquad 4 - x_T^2 - 1 = -2x_T(x_T+2)$

$x_T^2 + 4x_T + 3 = 0 \to x_T = -3, \; x_T = -1$

$T(-3,-5)$ y $(-1,3)$

$x=-3 \to$ recta 1: $y = 6x + 13$

$x=-1 \to$ recta 2: $y = 2x + 5$