PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: SETEMBRE 2011	CONVOCATORIA: SEPTIEMBRE 2011
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica $M^2 = M$. Obtener **razonadamente**:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - kI$ tiene inversa. (*2 puntos*).

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$. (*2 puntos*).

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha A^2 + \beta A = -2I$. (*4 puntos*).

d) Comprobar **razonadamente** que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones:

$$P^2 = P \qquad \text{y} \qquad MP = PM .$$

(*2 puntos, repartidos en 1 punto por cada igualdad*).

Problema A.2. En el espacio se dan las rectas $r:\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+2+\alpha=0 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente**:

a) El valor de α para el que las rectas r y s están contenidas en un plano. (*4 puntos*).

b) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para el valor de α obtenido en el apartado anterior. (*2 puntos*).

c) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que contiene el punto $(1, 2, 1)$. (*4 puntos*).

Problema A.3 Dada la función f definida por:

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y el recorrido de la función f. (*2 puntos*).

b) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ alcanza el máximo relativo y el mínimo relativo. (*2 puntos*).

c) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de dicha función f. (*2 puntos*).

d) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ tiene los puntos de inflexión. (*2 puntos*).

e) La gráfica de la curva $y = x^2 e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal. (*2 puntos*).

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y T, y se sabe que T es una matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$.

Calcular **razonadamente** los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) $\frac{1}{2}T$. (*3 puntos*).

b) M^4. (*3 puntos*).

c) TM^3T^{-1}. (*4 puntos*).

Problema B.2. Se da la recta $r: \begin{cases} x - 4y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi_\alpha : (2 + 2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0$, dependiente del parámetro real α. Obtener **razonadamente**:

a) La ecuación del plano π_α que pasa por el punto $(1,1,0)$. (*3 puntos*).

b) La ecuación del plano π_α que es paralelo a la recta r. (*4 puntos*).

c) La ecuación del plano π_α que es perpendicular a la recta r. (*3 puntos*).

Problema B.3. Un coche recorre el arco de parábola Γ de ecuación $2y = 36 - x^2$, variando la x de -6 a 6. Se representa por $f(x)$ a la distancia del punto $(0,9)$ al punto (x, y) del arco Γ donde está situado el coche. Se pide obtener **razonadamente**:

a) La expresión de $f(x)$. (*2 puntos*)

b) Los puntos del arco Γ donde la distancia $f(x)$ tiene mínimos relativos. (*2 puntos*).

c) Los valores máximo y mínimo de la distancia $f(x)$. (*2 punto*)

d) El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos $(-6, 0)$ y $(6, 0)$. (*4 puntos*)

Septiembre 2011

Opción A

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$M_{2\times2}$

$M^2 = M$

a) $B = A - kI$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$|B| = -3k + k^2 + 2 = 0 \quad k = 2 \quad k = 1$

$k \neq 1, 2$ la matriz B tiene inversa

b) B^{-1} $k = 3$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|B| = 2$

$$B\,adj = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^T adj = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

c) $\alpha A^2 + \beta A = -2I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha \\ 3\alpha & 7\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\beta \\ \beta & 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha + (-2\beta) \\ 3\alpha + \beta & 7\alpha + 3\beta \end{pmatrix}$$

$-2\alpha = -2 \qquad \alpha = 1$

$-6\alpha - 2\beta = 0 \qquad \beta = -3$

$3\alpha + \beta = 0$

$7\alpha + 3\beta = -2$

d) $P = I - M$

$P^2 = P$

$MP = PM$

$P^2 = (I-M)(I-M) = I^2 - IM - MI + M^2$

$= I - 2M + M^2 = I - 2M + M = I - M$

$M^2 = M$

$MP = M(I-M) = M - M^2 = M - M = 0$

$PM = (I-M)M = M - M^2 = M - M = 0$

2

$r = \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ $\qquad s = \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 2 + \alpha = 0 \end{cases}$

a) Dos rectas están contenidas en un plano, siempre que no se crucen, por lo tanto, la matriz $M(\vec{AB}, \vec{v_r}, \vec{v_s})$ deberá ser menor de 3 y $\vec{v_r} \neq \lambda \vec{v_s}$

$r = \begin{cases} A = (3, -1, 2) \\ \vec{v_r} = (1, 2, 1) \end{cases}$ $\qquad s = \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda + 2 + \alpha \end{cases}$ $\qquad B(1, 0, 2+\alpha)$, $\vec{v_s} = (-2, 1, 3)$

$\vec{AB} = (-2, 1, \alpha)$

$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \alpha \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |M| = -5\alpha + 15 = 0$

$\alpha = 3$

si $\alpha = 3$ rango $M < 3$ además se cumple $\vec{v_s} \neq \lambda \vec{v_r}$.

b) $\sigma \begin{cases} r \\ s \end{cases}$ $\vec{v_r} = \vec{v_\sigma} = (1,2,1)$

$\vec{v_s} = \vec{v_\sigma} = (-2,1,3)$

$A_r = A_\sigma = (3,-1,2)$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$6x-18+z-2-2y-2+4z-8-x+3-3y-3=0$$

$$\sigma \equiv 5x-5y+5z-30=0$$

c) $\pi \begin{cases} \perp r \\ C\ (1,2,1) \end{cases}$ $\vec{v_r} = \vec{n_\pi} = (1,2,1)$

$x+2y+z+D=0 \xrightarrow[C]{} 1\cdot1+2\cdot2+1\cdot1+D=0$

$D=-6$

$$\pi \equiv x+2y+z-6=0$$

3 $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$\text{Rec } f(x) = (0,+\infty)$

b) $f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \cdot e^{-x}(-1) = e^{-x}(2x-x^2)=0$

$e^{-x}=0$ $\quad x = \nexists$

$2x-x^2=0$

$x(2-x)=0$

$x=0$

$x=2$

$-\quad 0 \quad + \quad 2 \quad -$

$\searrow \ 0 \ \nearrow \ 2 \ \searrow$

$\max_r \left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ $\quad \min_r (0,0)$

c) Decrece: $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$

crece: $(0,2)$

d) $f''(x) = -e^{-x}(2x-x^2) + e^{-x}(2-2x) =$

$= e^{-x}(-2x+x^2+2-2x) = e^{-x}(+x^2-4x+2)$

$x^2-4x+2=0$

$x=2-\sqrt{2}$

$x=2+\sqrt{2}$

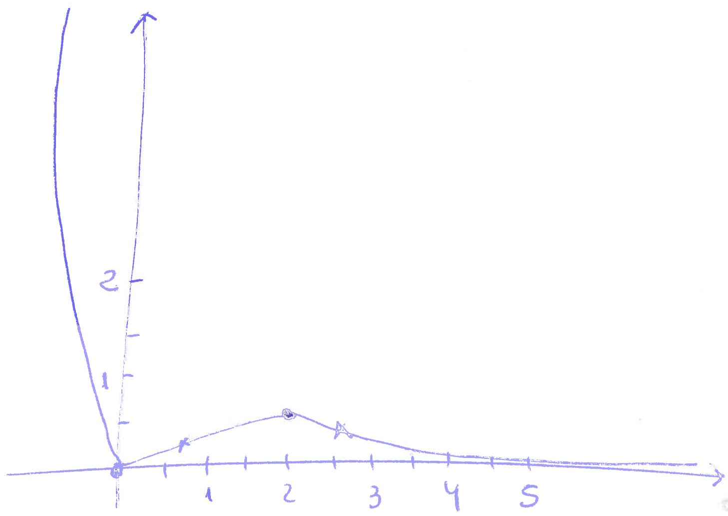
$+\quad 2-\sqrt{2} \quad - \quad 2+\sqrt{2} \quad +$

$\cup \quad \cap \quad \cup$

$(2+\sqrt{2},\ 0'38)$

$(2-\sqrt{2},\ 0'19)$

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = 0 \qquad y = 0$



Opción B

1

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$T_{3\times3}$

$|T| = \sqrt{2}$

$|M| = 6$

Propiedades:

$|kA| = k^n \cdot A$ siendo $A_{n\times n}$

$|A^n| = |A|^n$

$|A \cdot B| = |A||B|$

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

a) $\left|\frac{1}{2}T\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 |T| = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}/8$

b) $|M^4| = |M|^4 = 6^4 = 1296$

c) $|TM^3T^{-1}| = |T|\,|M^3|\,|T^{-1}| =$

$= |T|\,|M|^3 \dfrac{1}{|T|} = |M|^3 = 6^3 = 216$

2

$r = \begin{cases} x - 4y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ $\quad \pi_\alpha : (2+2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0$

a) π_α

$A(1,1,0)$

$(2+2\alpha)\cdot 1 + 1 + \alpha \cdot 0 - 2 - 6\alpha = 0$

$2 + 2\alpha + 1 - 2 - 6\alpha = 0$

$-4\alpha = -1$

$\alpha = 1/4$

$\pi_\alpha \equiv \frac{5}{2}x + y + \frac{1}{4}z - \frac{7}{2} = 0$

b) $\pi_\sigma \parallel r$

$\vec{v_r} = \vec{v_\pi}$ $\quad \vec{v_r} \perp \vec{n_\pi} \rightarrow \vec{v_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0$

$r \equiv \begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v_r} = (4,1,1)$

$\vec{n_\pi} = (2+2\alpha, 1, \alpha)$

$4\cdot(2+2\alpha) + 1\cdot 1 + 1\cdot\alpha = 0$

$8 + 8\alpha + 1 + \alpha = 0$

$9\alpha = -9$

$\alpha = -1$

c) $\pi_\sigma \perp r$

$\vec{v_\pi} \perp \vec{v_r}$

$\vec{n_\pi} \parallel \vec{v_r}$

$\vec{n_\pi} = \lambda \vec{v_r}$

$\frac{2+2\alpha}{4} = \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{1}$

$\alpha = 1$

3 $\quad 2y = 36 - x^2$

$-6 \leq x \leq 6$

$d(x) = d(\vec{AB})$

$A(0,9)$

$B(x,y)$

a) $d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-9)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{36-x^2}{2} - \frac{18}{2}\right.}$

$= \sqrt{x^2 + \left(\frac{18-x^2}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{324 - 36x^2 + x^4}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{x^4 - 32x^2 + 324}{4}} = \frac{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}{2}$

b) $d'(x)=\dfrac{(4x^3-64x)}{4\sqrt{x^4-32x^2+324}} = \dfrac{x^3-16x}{\sqrt{x^4-32x^2+324}} = 0$

$x(x^2-16)=0 \qquad x=0 \qquad x=\pm 4$

	-6		-4		0		4		6
		$-$		$+$		$-$		$+$	
		↘		↗		↘		↗	

$\min_r(-4,10)$

$\min_r(4,10)$

c) $d(-4)=\sqrt{17}$
$d(4)=\sqrt{17}$ → distancia mínima

$d(0)=9$ → distancia máxima

d) $\displaystyle\int_{-6}^{6}\frac{36-x^2}{2}\,dx=\left[18x-\frac{x^3}{6}\right]_{-6}^{6}=72-(-72)=144\,u^2$