PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: SETEMBRE 2012	CONVOCATORIA: SEPTIEMBRE 2012
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal triar només UNA dels dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma dels qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. **Es prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria). S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.**

BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. **Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.**

OPCIÓN A

Problema A.1. Sea el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ 3x+10y-z=0 \\ x+14y+\alpha z=0 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) La solución del sistema S cuando $\alpha=0$. (*4 puntos*).
b) El valor de α para el que el sistema S tiene infinitas soluciones. (*4 puntos*).
c) Todas las soluciones del sistema S cuando se da a α el valor obtenido en el apartado b). (*2 puntos*).

Problema A.2. En el espacio se tiene la recta $r:\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+mz=0$, donde m es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) Un vector director de la recta r. (*2 puntos*).
b) El valor de m para el que la recta r y el plano π son perpendiculares. (*2 puntos*).
c) El valor de m para el que la recta r y el plano π son paralelos. (*3 puntos*).
d) La distancia entre r y π cuando se da a m el valor obtenido en el apartado c). (*3 puntos*).

Problema A.3. Se definen las funciones f y g por $f(x)=-x^2+2x$ y $g(x)=x^2$.

Obtener **razonadamente**:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de esas dos funciones. (*2 puntos*).
b) El máximo relativo de la función $f(x)=-x^2+2x$ y el mínimo relativo de $g(x)=x^2$. (*2 puntos*).
c) Los puntos de intersección de las curvas $y=-x^2+2x$ e $y=x^2$. (*2 puntos*).
d) El área encerrada entre las curvas $y=-x^2+2x$ e $y=x^2$, donde en ambas curvas la x varía entre 0 y 1. (*4 puntos*).

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y B, donde B es una matriz de dos filas y dos columnas que no tiene ningún elemento nulo y que verifica la relación $B^2=-7B+U$.

Obtener **razonadamente**:

a) Los números reales a y b tales que $A^2=aA+bU$. (*4 puntos*).

b) Los números reales p y q tales que $B^{-1}=pB+qU$ (*2 puntos*), **justificando** que la matriz B tiene inversa (*2 puntos*).

c) Obtener los valores x e y para los que se verifica que $B^3=xB+yU$. (*2 puntos*).

Problema B.2. En el espacio se dan los planos π, σ y τ de ecuaciones:

$$\pi:\ 2x-y+z=3;\qquad \sigma:\ x-y+z=2;\qquad \tau:\ 3x-y-az=b,$$

siendo a y b parámetros reales, y la recta r intersección de los planos π y σ.

Obtener **razonadamente**:

a) Un punto, el vector director y las ecuaciones de la recta r. (*3 puntos*).

b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $(2,1,3)$. (*4 puntos*).

c) Los valores de a y de b para que el plano τ contenga a la recta r, intersección de los planos π y σ. (*3 puntos*).

Problema B.3. Se desea construir un depósito cilíndrico de 100 m^3 de capacidad, abierto por la parte superior. Su base es un círculo en posición horizontal de radio x y la pared vertical del depósito es una superficie cilíndrica perpendicular a su base.

El precio del material de la base del depósito es 4 euros/m^2.

El precio del material de la pared vertical es 2 euros/m^2.

Obtener **razonadamente**:

a) El área de la base en función de su radio x. (*1 punto*).

b) El área de la pared vertical del cilindro en función de x. (*2 puntos*).

c) La función $f(x)$ que da el coste del depósito. (*2 puntos*).

d) El valor x del radio de la base para el que el coste del depósito es mínimo y el valor de dicho coste mínimo. (*5 puntos*).

Septiembre 2012

Opción A

1

$$\left.\begin{array}{l} x-2y-3z=0 \\ 3x+10y-z=0 \\ x+14y+\alpha z=0 \end{array}\right\} \quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 10 & -1 & 0 \\ 1 & 14 & +\alpha & 0 \end{array}\right)}_{A'}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & +\alpha \end{pmatrix}$$

a) Es un sistema homogéneo, por tanto será un sistema compatible determinado con solución $(x,y,z)=(0,0,0)$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & +\alpha \end{vmatrix} = 10\alpha - 126 + 2 + 30 + 14 + 6\alpha = +16\alpha - 80 = 0$

$\alpha = 5$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 16$

$\alpha = 5 \longrightarrow$ SCI

rango $A = 2$

rango $A' = 2$

nº incógnitas $= 3$

c) $z = \lambda$ $\qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3\lambda \\ 3 & 10 & \lambda \end{array}\right)$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3\lambda & -2 \\ \lambda & 10 \end{vmatrix}}{16} = \frac{32\lambda}{16} = 2\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3\lambda \\ 3 & \lambda \end{vmatrix}}{16} = \frac{-8\lambda}{16} = -\frac{1}{2}\lambda$$

2) $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ $\pi : x+mz=0$ $\vec{n_\pi} = (1,0,m)$

a) $x=\lambda$ $\quad y-z=1-\lambda$

$\quad -y-z=-\lambda$

$\quad -2z=1-2\lambda$

$\quad z=-\frac{1}{2}+\lambda$

$y=1-\lambda-\frac{1}{2}+\lambda$

$y=\frac{1}{2}$

$r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2}+\lambda \end{cases}$

$\vec{v_r}=(1,0,1)$

b) $r \perp \pi$

$\vec{v_r}\cdot\vec{v_\pi}=0$

$\vec{v_r} \parallel \vec{n_\pi} \rightarrow \vec{v_r}=\alpha\,\vec{n_\pi} \rightarrow (1,0,1)=\alpha(1,0,m) \rightarrow m=1$

c) $r \parallel \pi$

$\vec{v_r}\cdot\vec{n_\pi}=0 \rightarrow (1,0,1)\cdot(1,0,m)=1+m=0 \rightarrow m=-1$

d) $d(r\,y\,\pi)=d(P,\pi)=\dfrac{|AP_1+BP_2+CP_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{\left|1\cdot 0+0\cdot\frac{1}{2}-1\cdot(-\frac{1}{2})+0\right|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}$

$m=-1$

$=\dfrac{1/2}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ u.

3 $f(x) = -x^2 + 2x \qquad g(x) = x^2$

a) $f'(x) = -2x + 2 = 0 \qquad g'(x) = 2x = 0$

$x = 1 \qquad x = 0$

$+ \quad - \qquad\qquad - \quad +$

$\nearrow \; 1 \; \searrow \qquad\qquad \searrow \; 0 \; \nearrow$

crece: $(-\infty, 1)$ decrece: $(-\infty, 0)$

decrece $(1, +\infty)$ crece $(0, +\infty)$

b) $\max_r f(x) : (1, 1) \qquad \min_r g(x) : (0, 0)$

c) $-x^2 + 2x = x^2$

$-2x^2 + 2x = 0$

$2x(-x + 1) = 0$

$x = 0$

$x = 1$

d) $\displaystyle\int_0^1 -2x^2 + 2x \, dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^1 =$

$= 1/3 \; u^2$

Opción B

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$U = I$

$B_{2\times 2}$

$B^2 = -7B + U$

a) $A^2 = aA + bU$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a \\ a & a+b \end{pmatrix}$$

$a + b = 0$ $\boxed{b = -2}$

$-a = -2$

$\boxed{a = 2}$

$a + b = 0$

b) $B^{-1} = pB + qU$

$B^2 = -7B + U$

$B^2 + 7B = U$

$B(B + 7U) = U$

$B \cdot B^{-1} = U$

$B^{-1} = B + 7U$

$p = 1$

$q = 7$

c) $B^3 = xB + yU$

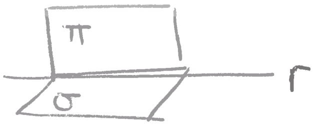
$B^2 \cdot B = (-7B + U) \cdot B =$

$= -7B^2 + B = -7(-7B + U) + B$

$= 49B - 7U + B = 50B - 7U$

$x = 50$ $y = -7$

2) $\pi \equiv 2x - y + z = 3$ $\quad \sigma \equiv x - y + z = 2$ $\quad \tau \equiv 3x - y - az = b$



a) $r = \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ $\qquad P_r = (1, 0, 1)$

$\vec{v_r} = (0, 1, 1)$

$$r \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

b) $\gamma = \begin{cases} r \\ A(2,1,3) \end{cases}$ $\qquad \vec{v_r} = \vec{v_\gamma} = (0,1,1) \qquad P_r = P_\gamma$

$\vec{AP} = \vec{v_\gamma} = (-1, -1, -2)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$-2x + 2 - y + z - 1 + x - 1 = 0$

$\gamma \equiv -x - y + z = 0$

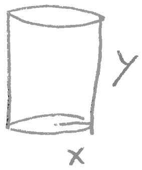
c) $\tau \left\{ r_{\pi y \sigma} \right.$ Si el plano contiene a la recta podemos obtener dos puntos de la recta que pertenezcan a dicho plano.

$r = \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ $\qquad P(1,0,1) \longrightarrow 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - a \cdot 1 = b$

$\lambda = 1 \to (1,1,2) \to 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - a \cdot 2 = b$

$$\left.\begin{array}{l} 3 - a = b \\ 2 - 2a = b \end{array}\right\} 3 - a = 2 - 2a \to \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

3 $V = 100\,m^3$



Precio base: $4\ €/m^2$

Precio pared: $2\ €/m^2$

a) $A = \pi r^2 + 2\pi r y$ $\quad V = \pi x^2 \cdot y$

$A = \pi x^2 + 2\pi x y$ $\quad 100 = \pi x^2 \cdot y$

$A = \pi x^2 + \dfrac{2\pi x \cdot 100}{\pi x^2}$ $\quad \dfrac{100}{\pi x^2} = y$

$A = \pi x^2 + \dfrac{200}{x}$

$A_b = \pi x^2$ $\quad$ b) $A_p = \dfrac{200}{x}$

c) $f(x) = 4\pi x^2 + \dfrac{400}{x}$

d) $f'(x) = 8\pi x - \dfrac{400}{x^2} = \dfrac{8\pi x^3}{x^2} - \dfrac{400}{x^2} = 0$ $\quad x = 2'515$

$-$ $\quad$ $+$

$\searrow$ $2'515$ $\nearrow$

$f(2'515) = 238'53\ €$