PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2013	CONVOCATORIA: JUNIO 2013
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$, donde a, b y c son tres números reales. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La relación que deben verificar los números a, b y c para que el sistema sea compatible. (4 *puntos*).
b) La solución del sistema cuando $a=-1$, $b=2$ y $c=3$. (2 *puntos*).
c) La solución del sistema cuando los números a, b y c verifican la relación $a=c=-2b$. (4 *puntos*).

Problema A.2. Sean $O=(0,0,0)$, $A=(1,0,1)$, $B=(2,1,0)$ y $C=(0,2,3)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo de vértices O, A y B, (3 *puntos*) y el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C. (2 *puntos*).
b) La distancia del vértice C al plano que contiene al triángulo OAB. (3 *puntos*).
c) La distancia del punto C' al plano que contiene al triángulo OAB, siendo C' el punto medio del segmento de extremos O y C. (2 *puntos*).

Problema A.3. Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es $y^2=2x+9$, siendo $-4{,}5\le x\le 8$ e $y\ge 0$, estando situado el Sol en el punto $(0,0)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del meteorito al Sol desde un punto P de su trayectoria cuya abscisa es x. (3 *puntos*).
b) El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol. (5 *puntos*).
c) Distancia mínima del meteorito al Sol. (2 *puntos*).

Nota. En los tres resultados sólo se dará la expresión algebraica o el valor numérico obtenido, sin mencionar la unidad de medida por no haber sido indicada en el enunciado.

OPCIÓN B

Problema B.1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, obtener **razonadamente** el valor de los determinantes siguientes, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$. (4 *puntos*).

b) $|(A+B)^{-1}A|$ y $|A^{-1}(A+B)|$. (3 *puntos*).

c) $|2ABA^{-1}|$ y $|A^3B^{-1}|$. (3 *puntos*).

Problema B.2. Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ y $P = (0, -3, 2)$, se pide calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del punto P al punto A. (2 *puntos*)

b) La distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos A y B. (4 *puntos*)

c) La distancia del punto P al plano que pasa por los puntos A, B y C. (4 *puntos*)

Problema B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, para cualquier valor real x, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi/6$. (4 *puntos*).

b) La ecuación de la recta normal a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi/3$. Se recuerda que la recta normal a una curva en un punto P es la recta que pasa por ese punto P y es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto P. (3 *puntos*).

c) El ángulo formado por las rectas determinadas en los apartados a) y b). (3 *puntos*).

Junio 2013

Opción A

1 a)

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = a \\ -x - 4y = b \\ 2x + y = c \end{array}\right\} \quad \overbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \overbrace{2 \quad 5}^{A} & & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{array}\right)}^{A'}$$

Para que sea compatible el rango $A = 2$, rango de $A' = 2$ y nº incógnitas $= 2$, de modo que $|A'| = 0$

$$|A'| = -8c - a + 10b + 8a - 2b + 5c = 7a + 8b - 3c = 0$$

b) $a = -1$ $\quad 7a + 8b - 3c = 0$

$b = 2$ $\quad 7(-1) + 8\cdot 2 - 3\cdot 3 = 0$

$c = 3$ $\quad$ Cumple la condición para que sea un SCD

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{array}\right) \quad \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ \underbrace{-1 \quad -4}_{A} & & 2 \end{array}\right)}_{A'}$$

$|A| = -3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{-3} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = -1$$

c) $a = c = -2b$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -2b \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & -2b \end{array}\right)$$

$$7(-2b) + 8b - 3(-2b) = -14b + 8b + 6b = 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2b & 5 \\ b & -4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{8b - 5b}{-3} = -b$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2b \\ -1 & b \end{vmatrix}}{-3} = 0$$

2 $O=(0,0,0)$ $A=(1,0,1)$ $B=(2,1,0)$ $C=(0,2,3)$

a) $A_t(O,A,B)=\frac{1}{2}\left|[\bar{u}\times\bar{v}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}/2\ u^2$

$\vec{u}=\vec{OA}=(1,0,1)$

$\vec{v}=\vec{OB}=(2,1,0)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}+2\vec{j}-\vec{i}$$

$V_t(O,A,B,C)=\frac{1}{6}[\bar{u},\bar{v},\bar{w}]=7/6\ u^3$

$\vec{w}=\vec{OC}=(0,2,3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

b) $d(C,\sigma)=\frac{|AP_1+BP_2+CP_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-1\cdot 0+2\cdot 2+1\cdot 3+0|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{6}}\ u$

$\sigma=\begin{pmatrix} O \\ A \\ B \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow z+2y-x=0\equiv\sigma$

c) $d(C',\sigma)=\frac{|2\cdot 1+1\cdot 3/2|}{\sqrt{6}}=\frac{7/2}{\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{12}\ u$

$\sigma\begin{pmatrix} O \\ A \\ B \end{pmatrix}$ $\sigma\equiv -x+2y+z=0$

C' $\frac{\vec{OC}}{2}=\left(\frac{0}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2}\right)=(0,1,3/2)$

3 $y^2 = 2x + 9$ $\quad -4'5 \leq x \leq 8$

$y \geq 0$

Sol $(0,0)$ $\quad P(x, y)$

a) $d(P, \text{sol}) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} =$

$= \sqrt{x^2 + 2x + 9}$

b) $d'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x + 9}} \cdot (2x + 2) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 9}} = 0$

$x = -1$

$-$ $\quad$ $+$

$-4'5 \searrow -1 \nearrow 8$ $\qquad P(-1, \sqrt{7})$

$y = \sqrt{2(-1) + 9} = \sqrt{7}$

c) $d(-1) = \sqrt{8}$

Opción B

1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |A| = 4 \\ |B| = -4 \end{matrix}$$

a) $|A+B| = 24$

$$\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{|A+B|} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{192}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$|(A+B)^{-1} A| = |A+B|^{-1} \cdot |A| = \frac{1}{|A+B|} \cdot |A| = \frac{1}{24} \cdot 4 = \frac{1}{6}$$

$$|A^{-1}(A+B)| = |A^{-1}|\,|A+B| = \frac{1}{|A|}\,|A+B| = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$$

c) $$|2ABA^{-1}| = 2^3 |A|\,|B| \frac{1}{|A|} = 8|B| = -32$$

$$|A^3 B^{-1}| = |A|^3 \cdot \frac{1}{|B|} = 4^3 \cdot \frac{1}{-4} = -16$$

2 $A=(1,0,1)$ $B=(2,-1,0)$ $C=(0,1,1)$ $P=(0,-3,2)$

a) $d(P,A)=\sqrt{(0-1)^2+(-3-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{11}$

b) $d(P,r_{AB})=\dfrac{|\vec{PA}\times\vec{AB}|}{|\vec{AB}|}=\dfrac{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\,u$

$r_{AB}\begin{cases}\vec{AB}=(1,-1,-1)\\ A=(1,0,1)\end{cases}$ $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-3\vec{i}-\vec{k}-\vec{j}-3\vec{k}-\vec{i}+\vec{j}$

$=-4\vec{i}-4\vec{k}$

$\vec{PA}=(1,3,-1)$

c) $d(P,\sigma_{ABC})=\dfrac{|AP_1+BP_2+CP_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{|1\cdot0+1\cdot(-3)+0\cdot2-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=$

$=2\sqrt{2}\,u$

$\sigma_{ABC}=\begin{cases}\vec{AB}=(1,-1,-1)\\ \vec{AC}=(-1,1,0)\\ A=(1,0,1)\end{cases}$ $\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$

$z-1+y-z+1+x-1=0$ $\sigma\equiv x+y-1=0$

3 $f(x)=\text{sen}\,x$

a) $x_0=\pi/6$ $y_0=1/2$ $m_1=\sqrt{3}/2$

$f'(x)=\cos x=\cos\pi/6=\sqrt{3}/2$

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

$y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/6)$

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}+\dfrac{1}{2}$

b) $x_0 = \frac{\pi}{3}$ $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $m_2 = -2$

$$g'(x_0) = \cos \pi/3 = \frac{1}{2}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{g'(x_0)}(x - x_0)$$

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{1/2}(x - \pi/3)$$

$$y = -2x + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right| = \left|\frac{-2 - \sqrt{3}/2}{1 + (-2)\cdot\sqrt{3}/2}\right| = 3'915$$

$$\alpha = 1'32 \text{ rad} = 75'67^\circ$$