GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ, CULTURA I ESPORT

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2014	CONVOCATORIA: JUNIO 2014
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+3y+2z & = & -1 \\ 2x+4y+5z & = & k-2 \\ x+k^2y+3z & = & 2k \end{cases}$, donde k es un parámetro real se pide:

a) Discutir **razonadamente** el sistema según los valores de k. (4 *puntos*).

b) Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, todas las soluciones del sistema cuando $k=-1$. (3 *puntos*).

c) Resolver **razonadamente** el sistema cuando $k=0$. (3 *puntos*).

Problema A.2. Se dan el punto $A=(-1,\ 0,\ 2)$ y las rectas $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=z-2$ y $s: \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\ \ 1+3\lambda \\ z=\ \ 1+\ \lambda \end{cases}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto A y contiene a la recta r. (3 *puntos*).

b) La ecuación del plano σ que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta s. (3 *puntos*)

c) Un vector dirección de la recta l intersección de los planos π y σ (2 *puntos*) y la distancia entre las rectas s y l. (2 *puntos*).

Problema A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor de m para el cual la función $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x}, & x\le 0 \\ \dfrac{(x+1)\operatorname{sen}x}{x}, & x>0 \end{cases}$ es continua en $x=0$. (3 *puntos*).

b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función $(x+1)e^{2x}$. (3 *puntos*).

c) La integral $\int (x+1)e^{2x}dx$, (2 *puntos*) y el área limitada por la curva $y=(x+1)e^{2x}$ y las rectas $x=0$, $x=1$ e $y=0$. (2 *puntos*).

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La matriz inversa A^{-1} de la matriz A. (3 *puntos*).

b) La matriz X que es solución de la ecuación $AX = BC$. (4 *puntos*).

c) El determinante de la matriz $2M^3$, siendo M una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale $\frac{1}{2}$. (3 *puntos*).

Problema B.2. Se da el triángulo T, cuyos vértices son $A=(1,\ 2,\ -2)$, $B=(0,\ -3,\ 1)$ y $C=(-1,\ 0,\ 0)$, y los planos $\pi_1 : x+y+z+1=0$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = -\alpha + \beta + 1 \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa del plano π_1 y del plano que contiene al triángulo T. (4 *puntos*).

b) Un vector $\vec{n}_1$ perpendicular al plano π_1 y un vector $\vec{n}_2$ perpendicular al plano π_2 (1,5 *puntos*) y el coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ (1,5 *puntos*).

c) Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2. (3 *puntos*).

Problema B.3. Se tiene un cuadrado de mármol de lado 80 cm. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono de vértices $A=(0,\ 20)$, $B=(20,\ 0)$, $C=(80,\ 0)$, $D=(80,\ 80)$ y $E=(0,\ 80)$. Para obtener una pieza rectangular se elige un punto $P=(x,\ y)$ del segmento AB y se hacen dos cortes paralelos a los ejes X e Y. Así se obtiene un rectángulo R cuyos vértices son los puntos $P=(x,\ y)$, $F=(80,\ y)$, $D=(80,\ 80)$ y $G=(x,\ 80)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del rectángulo R en función de x, cuando $0 \le x \le 20$. (3 *puntos*).

b) El valor de x para el que el área del rectángulo R es máxima. (5 *puntos*).

c) El valor del área máxima del rectángulo R. (2 *puntos*).

Junio 2014

Opción A

① a) $$\left.\begin{aligned} x+3y+2z&=-1\\ 2x+4y+5z&=k-2\\ x+k^2y+3z&=2k \end{aligned}\right\}\quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1&3&2&-1\\ 2&4&5&k-2\\ 1&k^2&3&2k \end{array}\right)}_{A'}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1&3&2\\ 2&4&5\\ 1&k^2&3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 12+4k^2+15-8-5k^2-18 = -k^2+1 = 0$$

$k = \pm 1$

Si $k \neq \pm 1$	Si $k=1$	Si $k=-1$
rango $A=3$	rango $A=2$	rango $A=2$
rango $A'=3$	rango $A'=3$	rango $A'=2$
nº incógnitas $=3$	nº incógnitas $=3$	nº incógnitas $=3$
SCD	SI	SCI

$k=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&3&2&-1\\ 2&4&5&-1\\ 1&1&3&2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1&3&2\\ -1&4&5\\ 2&1&3 \end{vmatrix} = 14$$

$$\begin{vmatrix} 1&3\\ 2&4 \end{vmatrix} = -2$$

$k=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&3&2&-1\\ 2&4&5&-3\\ 1&1&3&-2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1&3&2\\ -3&4&5\\ -2&1&3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1&3\\ 2&4 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1&-1&2\\ 2&-3&5\\ 1&-2&3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1&3&-1\\ 2&4&-3\\ 1&1&-2 \end{vmatrix} = 0$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{-2} \end{array}\right) \xrightarrow{} F_3 = F_2 - F_1 \Longrightarrow$$

$$x = \lambda \qquad \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1-\lambda \\ 4 & 5 & -3-2\lambda \end{array}\right)}_{A'}$$

A

A'

$$|\Delta| = 7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3-2\lambda & 5 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-5-5\lambda+6+4\lambda}{7} = \frac{-\lambda+1}{7}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1-\lambda \\ 4 & -3-2\lambda \end{vmatrix}}{7} = \frac{-9-6\lambda+4+4\lambda}{7} = \frac{-2\lambda-5}{7}$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

A

A'

$$|\Delta| = -k^2+1 = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1} = -2$$

② $A=(-1,0,2)$ $\quad r\equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=z-2$ $\quad s\equiv\begin{cases}x=-1-2\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}$

a) $\pi=\begin{cases}A\\ r\end{cases}$ $\quad \vec{v_r}=v_\pi=(2,3,1)$ $\quad \begin{vmatrix}x+1 & y-0 & z-2\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$

$B_r=B_\pi=(1,0,2)$

$\overrightarrow{AB}=v_\pi=(2,0,0)$

$2y-6z+12=0\ \equiv\pi$

b) $\sigma=\begin{cases}A\\ \perp s\end{cases}$ $\quad \vec{v_s}=\vec{n_\sigma}=(-2,3,1)$ $\quad -2x+3y+z+D=0\xrightarrow{\ \ }A$

$-2(-1)+3\cdot0+1\cdot2+D=0$

$D=-4$

$\sigma\equiv -2x+3y+z-4=0$

c) $\vec{v}p$

$\vec{v_p}=\vec{n_\pi}\times\vec{n_\sigma}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -6\\ -2 & 3 & 1\end{vmatrix}=$

$=2\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}+18\vec{i}=20\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}$

$\vec{v_p}=(20,12,4)=(5,3,1)$

$p=\begin{cases}2y-6z+12=0\\ -2x+3y+z-4=0\end{cases}\longrightarrow z=\lambda$

$y=\dfrac{6\lambda-12}{2}=3\lambda-6$

$x=\dfrac{3(3\lambda-6)+\lambda-4}{2}=5\lambda-11$

$p=\begin{cases}x=5\lambda-11\\ y=3\lambda-6\\ z=\lambda\end{cases}$ $\quad \vec{v_p}=(5,3,1)$ $\quad \vec{v_s}=(-2,3,1)$

$B=(-11,-6,0)$ $\quad A=(-1,1,1)$ $\quad \overrightarrow{AB}=(-10,-7,-1)$

$d(p,s)=\dfrac{28}{\sqrt{490}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ 4

$\begin{vmatrix}-10 & -7 & -1\\ 5 & 3 & 1\\ -2 & 3 & 1\end{vmatrix}=28$ $\quad |\vec{v_s}\times\vec{v_p}|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 1\end{matrix}\right\|=|7\vec{j}-21\vec{k}|=\sqrt{7^2+(-21)^2}$

$=\sqrt{490}$

③ a) $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x} & x\le 0 \\ \dfrac{(x+1)\operatorname{sen}x}{x} & x>0 \end{cases}$

$x\le 0$ → continua en su dominio

$x>0$ → continua en su dominio

$$\lim_{x\to 0^-} m(x+1)e^{2x} = m$$

$$\boxed{m=1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\operatorname{sen}x}{x} = \frac{0}{0} \underset{\substack{\uparrow\\ L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x+(x+1)\cos x}{1} = 1$$

$f(0)=m$

b) $f(x)=(x+1)e^{2x}$

$$f'(x)=e^{2x}+(x+1)e^{2x}\cdot 2 = e^{2x}\left[1+2x+2\right]=0$$

$e^{2x}=0 \rightarrow x=\nexists$ $\quad 2x+3=0 \quad x=-3/2$

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -3/2 & \\ \searrow & & \nearrow \end{array}$$

decrece: $(-\infty, -3/2)$ crece: $(-3/2, +\infty)$

c) $$\int (x+1)e^{2x}\,dx = \int xe^{2x}\,dx+\int e^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

$$=\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{e^{2x}}{4}+C$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{2x}dx}_{dv} = \frac{x\cdot e^{2x}}{2}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C$$

$u=x \qquad du=dx$

$dv=e^{2x}dx \qquad v=\frac{1}{2}e^{2x}$

$\int u\,dv = uv-\int v\,du$

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx = \left[\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1$$

$$=5'29\ u^2$$

Opción B

①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $$A^{-1} = \frac{A^T_{adj}}{|\Delta|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{adj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Delta^T_{adj} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\Delta| = 1$$

b) $AX = BC \qquad X = A^{-1} \cdot BC$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

c) $|2M^3| = 2^2 |M|^3 = 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$

M_{2x2}

$|M| = \frac{1}{2}$

Propiedades $|kM| = k^n |M| \quad M_{nxn}$

$|M^n| = |M|^n$

② $A=(1,2,-2)$ $B=(0,-3,1)$ $C=(-1,0,0)$: T

$\pi_1 = x+y+z+1=0$ $\quad \pi_2 = \begin{cases} x = -\alpha + \beta + 1 \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$ $\quad A(1,0,0)$, $\vec{V_1}=(-1,1,1)$, $\vec{V_2}=(1,-2,1)$

a) π_1 y $\sigma_{\Delta BC}$

$\sigma_{\Delta BC} \begin{cases} \overrightarrow{\Delta B} = (-1,-5,3) \\ \overrightarrow{\Delta C} = (-2,-2,2) \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ -1 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$-10x-10+2z-6y-10z+6x+6+2y=0$

$\sigma \equiv -4x-4y-8z-4=0$

$x+y+2z+1=0$

$\pi \equiv x+y+z+1=0$

$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{1} = \frac{1}{1} \rightarrow \pi_1$ y σ son secantes.

b) $\vec{n_1} \perp \vec{\pi_1}$ $\quad \vec{n_{\pi_1}} = \vec{n_1} = (1,1,1)$

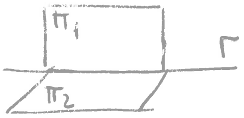
$\vec{n_2} \perp \vec{\pi_2}$ $\quad \vec{n_{\pi_2}} = \vec{n_2} = (3,2,1)$

$\pi_2 \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x-1+2z+y-z+2x-2+y=0$

$\pi_2 \equiv 3x+2y+z-3=0$

$$\cos(\vec{n_1} \text{ y } \vec{n_2}) = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{1\cdot3+1\cdot2+1\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}}$$

c)



$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 3x+2y+z-3=0 \end{cases}$$

$x=\lambda$ $\quad y+z=1-\lambda$

$$\begin{array}{r} 2y+z=3-3\lambda \\ \hline -y \quad =-2+2\lambda \end{array}$$

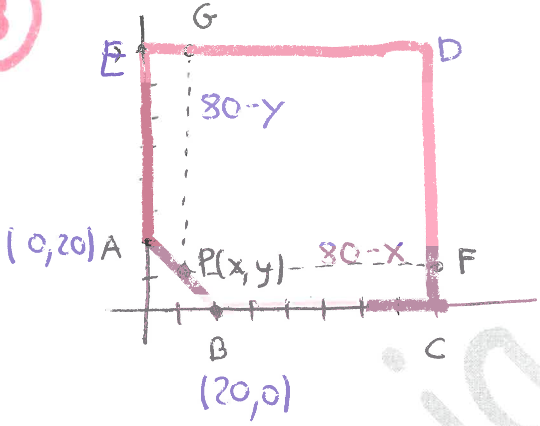
$y=2-2\lambda$

$z=-1-\lambda-2+2\lambda$

$z=\lambda-3$

$$r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=\lambda-3 \end{cases}$$

③



a) $\overrightarrow{AB}=(20,-20)$

$$\frac{x-0}{20}=\frac{y-20}{-20}$$

$-20x=20y-400$

$$\frac{-20x+400}{20}=y$$

$-x+20=y$

$A=(80-x)(80-y)=(80-x)(80-(-x+20))=(80-x)(60+x)$

$=4800+80x-60x-x^2=-x^2+20x+4800$ $\qquad 0\leq x\leq 20$

b) $A'(x)=-2x+20=0$ $\qquad x=10\text{cm}$ $\quad \begin{array}{c|c} + & - \\ \nearrow & \searrow \end{array}$ 10

c) $A(10)=4900\ \text{cm}^2$