GENERALITAT VALENCIANA

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2015	CONVOCATORIA: JULIO 2015
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 3y + z = \alpha \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 2\alpha + 3 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 *puntos*)
b) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 0$. (3 *puntos*)
c) El valor de α para el que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

Problema A.2. Se tienen las rectas $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$, $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(0, 3, -2)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P y es paralela a la recta r. (3 *puntos*)
b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s. (4 *puntos*)
c) La distancia entre las rectas r y s. (3 *puntos*)

Problema A.3. Se da la función f definida por $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)
b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. (4 *puntos*)
c) La integral $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$. (3 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de x para los cuales la matriz B tiene inversa. (3 puntos)

b) El valor del determinante de las matrices A^3 y $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$, sabiendo que el valor del determinante de la matriz A es 8. (4 puntos)

c) Los valores de $x,\ y,\ z$ para los cuales $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

Problema B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=3-\alpha \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+mz+1=0$, siendo m un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de las rectas r y s y el punto (o puntos) comunes a r y s. (4 *puntos*)

b) El valor del parámetro m para que la recta s sea paralela al plano π. (3 *puntos*)

c) La ecuación del plano que contiene a la recta s y al punto $P\,(1, 2, 4)$. (3 *puntos*)

Problema B.3. Se va a construir un depósito de $1500\,m^3$ de capacidad, con forma de caja abierta por la parte superior. Su base es pues un cuadrado y las paredes laterales son cuatro rectángulos iguales perpendiculares a la base. El precio de cada m^2 de la base es de 15 € y el precio de cada m^2 de pared lateral es de 5 €.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El coste total del depósito en función de la longitud x de un lado de su base. (3 *puntos*)

b) Las longitudes del lado de la base y de la altura del depósito para que dicho coste total sea mínimo. (5 *puntos*)

c) El valor del mínimo coste total del depósito. (2 *puntos*)

Julio 2015

Opción A

1

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+z=\alpha \\ x+y-\alpha z=1 \\ 2x+\alpha y-z=2\alpha+3 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & -\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 & 2\alpha+3 \end{array}\right)$$

A (matriz de coeficientes), A' (matriz ampliada)

Si $\alpha \neq 0, 5$
rango $A=3$
rango $A'=3$ → SCD
nº incognitas $=3$

a) $|A| = -1+\alpha-6\alpha-2+\alpha^2+3 = \alpha^2-5\alpha = 0 \;\to\; \alpha=0,\ \alpha=5$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ 2\alpha+3 & \alpha & -1 \end{vmatrix}}{\alpha^2-5\alpha}=\frac{-\alpha+\alpha-6\alpha^2-9\alpha-2\alpha-3+\alpha^3+3}{\alpha^2-5\alpha}$$

$$=\frac{\alpha^3-6\alpha^2-11\alpha}{\alpha^2-5\alpha}=\frac{\alpha^2-6\alpha-11}{\alpha-5}=\frac{-4}{-6}=2/3$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ 2 & 2\alpha+3 & -1 \end{vmatrix}}{\alpha^2-5\alpha}=\frac{-1+2\alpha+3-2\alpha^2-2+2\alpha^2+3\alpha+\alpha}{\alpha^2-5\alpha}$$

$$=\frac{6\alpha}{\alpha^2-5\alpha}=\frac{6}{\alpha-5}=\frac{6}{-6}=-1$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & 2\alpha+3 \end{vmatrix}}{\alpha^2-5\alpha}=\frac{2\alpha+3+\alpha^2+6-2\alpha-\alpha-6\alpha-9}{\alpha^2-5\alpha}$$

$$=\frac{\alpha^2-7\alpha}{\alpha^2-5\alpha}=\frac{\alpha-7}{\alpha-5}=\frac{-8}{-6}=4/3$$

b) $\alpha = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$\underbrace{}_{A}$ $\quad$ $\underbrace{}_{A'}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-3 = -2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3+3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1+3-2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3+6-9 = 0$$

rango $A = 2$

rango $A' = 2$ $\rightarrow$ SCI

nº incógnitas $= 3$

$z = \lambda$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-\lambda-3}{-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+\lambda}{-2}$$

c) $\alpha = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 13 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 13 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -80$$

rango $A = 2$

rango $A' = 3$ $\quad$ SI

nº incógnitas $= 3$

2 $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad P(0,3,-2)$

a) $t = \begin{cases} P \\ t \parallel r \end{cases}$ $\vec{v}_t = \vec{v}_r = (3,-1,2)$ $\quad t \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -\lambda + 3 \\ z = 2\lambda - 2 \end{cases}$

b) $\pi = \begin{cases} r & \vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (3,-1,2) \quad A(-1,1,0) \\ \pi \parallel s & \vec{v}_s = \vec{v}_\pi = (1,-1,0) \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3z + 2y - 2 + z + 2x + 2 = 0$$

$\pi \equiv 2x + 2y - 2z = 0$

c) $d(r\,y\,s) = \frac{|[\vec{PP'}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}} = \sqrt{3}/3 \text{ u}$

$A_r(-1,1,0)$
$A_s(1,0,0)$ $\rightarrow \vec{PP'} = (2,-1,0)$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

3 $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$

a) $(x+1)^2=0$

$x=-1$

$\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}\sim\{-1\}$

$\underline{AV} \rightarrow x=-1$

$\lim_{x\to -1} f(x)=\infty$

$\underline{AH} \rightarrow y=0$

$\lim_{x\to \infty} f(x)=0$

$\underline{AO} \rightarrow$ no tiene

b) $f'(x)=\dfrac{(x+1)^2-x\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{x^2+2x+1-2x^2-2x}{(x+1)^4}=$

$=\dfrac{-x^2+1}{(x+1)^4}=0 \qquad x=\pm 1$

$$\begin{array}{ccccc} & - & & + & & - \\ \hline & & -1 & & 1 & \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow \end{array}$$

Decrece: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ Crece: $(-1,1)$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx=\int \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}\,dx=\int\frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}\,dx=$

$\displaystyle=\int\frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}\,dx=\int\frac{1}{x+1}\,dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+C$

$A=1$

$A+B=0$

$B=-1$

Opción B

1

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1-3x = 0 \qquad x = -1/3$

$x \neq -1/3$ La matriz B tiene inversa.

b) $|A| = 8$

$|A^3| = |A|^3 = 8^3 = 512$

$$\begin{vmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot 5 \cdot 8 = 80$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y-z & x+1 & -x+3 \\ xy+2y+3z & y+7 & -y+6 \\ xz+y & z+2 & -z+3 \end{pmatrix}$$

$x^2+y-z=0$

$x+1=0 \rightarrow \boxed{x=-1}$

$-x+3=4 \rightarrow x=-1$

$xy+2y+3z=3$

$y+7=7 \rightarrow \boxed{y=0}$

$-y+6=6 \rightarrow y=0$

$xz+y=-1$

$z+2=3 \rightarrow \boxed{z=1}$

$-z+3=2 \rightarrow z=1$

2

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x + mz + 1 = 0$$

$\vec{n_\pi} = (2, 0, m)$

a) $r \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda + 5 \\ z = 6\lambda + 8 \end{cases}$

$\vec{V_r} = (1, 2, 6)$

$A_r = (0, 5, 8)$

$\vec{V_s} = (-2, 1, -1)$

$B_s = (1, 2, 3)$

$\vec{AB} = (1, -3, -5)$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

El rango de la matriz $M(\vec{AB}, \vec{v_r}, \vec{v_s})$ es 2 y $\vec{v_r} \neq \lambda \vec{V_s}$

por lo tanto son dos rectas secantes. $Q(-1, 3, 2)$

$\lambda = 1 - 2\alpha$

$2\lambda + 5 = 2 + \alpha \longrightarrow 2(1 - 2\alpha) + 5 = 2 + \alpha$

$6\lambda + 8 = 3 - \alpha$

$2 - 4\alpha + 5 = 2 + \alpha$

$\alpha = 1$

$\lambda = -1$

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

b) $s \parallel \pi$

$\vec{V_s} = \vec{V_\pi}$

$\vec{V_s} \perp \vec{n_\pi}$

$\vec{V_s} \cdot \vec{n_\pi} = 0$

$(-2, 1, -1) \cdot (2, 0, m) = 0$

$-4 + m = 0$

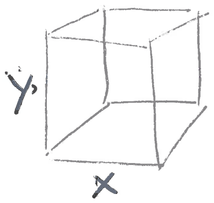
$m = 4$

c) $\sigma \begin{cases} s & \vec{V_s} = \vec{V_\sigma} = (-2, 1, -1) \quad B_s = B_\sigma = (1,2,3) \\ P(1,2,4) & \vec{V_\sigma} = \vec{PB} = (0,0,-1) \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad 1 - x - 2y + 4 = 0 \equiv \sigma$$

$$\sigma \equiv -x - 2y + 5 = 0$$

3 $V = 1500\ m^3$



precio base $15€/m^2$

precio pared $5€/m^2$

a) $V = x^2 \cdot y = 1500 \rightarrow y = \dfrac{1500}{x^2}$

$f(x) = 15x^2 + 5 \cdot 4 \cdot xy$

$f(x) = 15x^2 + 20x \cdot \dfrac{1500}{x^2}$

$f(x) = 15x^2 + \dfrac{30000}{x}$

b) $f'(x) = 30x - \dfrac{30000}{x^2} = \dfrac{30x^3 - 30000}{x^2} = 0$

$x = 10\ m$ $\quad$ (0) $-$ (10) $+$ $\quad$ $\searrow$ $\nearrow$ $\quad$ $y = 15$

c) $f(10) = 4500\ €$