GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ, CULTURA I ESPORT

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2015	CONVOCATORIA: JUNIO 2015
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La matriz inversa de la matriz A. (2 *puntos*)

b) Las matrices X e Y de orden 2×2 tales que $XA=B$ y $AY=B$. (2 + 2 *puntos*)

c) **Justificar razonadamente** que si M es una matriz cuadrada tal que $M^2=I$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que M, entonces se verifica la igualdad $M^3=M^7$. (4 *puntos*)

Problema A.2. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P(2,0,1)$ y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases}x+2y=0\\ z=0\end{cases}$. (3 *puntos*)

b) Las coordenadas del punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π. (2 *puntos*)

c) La distancia del punto P a la recta r, (3 *puntos*),
y **justificar razonadamente** que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. (2 *puntos*)

Problema A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función real f definida por $f(x)=(x-1)(x-3)$, siendo x un número real. (3 *puntos*)

b) El área del recinto acotado limitado entre las curvas $y=(x-1)(x-3)$ e $y=-(x-1)(x-3)$. (4 *puntos*)

c) El valor positivo de a para el cual el área limitada entre la curva $y=a(x-1)(x-3)$, el eje Y y el segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ es 4/3. (3 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (1-\alpha)x + (2\alpha+1)y + (2\alpha+2)z = \alpha \\ \alpha x + \alpha y = 2\alpha+2 \\ 2x + (\alpha+1)y + (\alpha-1)z = \alpha^2-2\alpha+9 \end{cases}$,

donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 1$. (3 *puntos*)

b) **La justificación razonada** de si el sistema es compatible o incompatible cuando $\alpha = 2$. (3 *puntos*)

c) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

Problema B.2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+2=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} 3y+1=0 \\ x-2z-3=0 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El plano paralelo a la recta s que contiene a la recta r. (3 *puntos*)

b) La recta t que pasa por el punto $(0, 0, 0)$, sabiendo que un vector director de t es perpendicular a un vector director de r y también es perpendicular a un vector director de s. (3 *puntos*)

c) **Averiguar razonadamente** si existe o no un plano perpendicular a s que contenga a la recta r. (4 *puntos*)

Problema B.3. Un pueblo está situado en el punto $A(0, 4)$ de un sistema de referencia cartesiano. El tramo de un río situado en el término municipal del pueblo describe la curva $y = \frac{x^2}{4}$, siendo $-6 \le x \le 6$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia entre un punto $P(x, y)$ del río y el pueblo en función de la abscisa x de P. (2 *puntos*)

b) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia mínima del pueblo. (4 *puntos*)

c) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia máxima del pueblo. (4 *puntos*)

Junio 2015

Opción A

1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $A^{-1} = \dfrac{A^T_{adj}}{|A|} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = 8 \qquad A_{adj} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ +3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^T_{adj} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $XA = B \qquad AY = B$

$X = B \cdot A^{-1} \qquad Y = A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ -1/4 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ -1/4 & 1/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $M^2 = I \qquad M^7 = M^4 \cdot M^3 = (M^2)^2 \cdot M^3 = I^2 \cdot M^3 = M^3$

$M^3 = M^7$

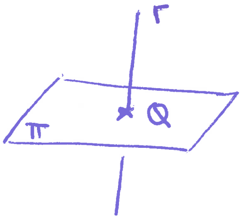
2

a) $\pi = \begin{cases} P(2,0,1) \\ \pi \perp r \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases}$ $\quad \vec{v_r} = \vec{n_\pi} \quad \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=0 \end{cases} \quad \vec{v_r}=(2,-1,0)$

$2x-y+D=0 \xrightarrow[P]{} 4+D=0 \rightarrow 2x-y-4=0 \equiv \pi$

$D=-4$

b) Q



$2(2\lambda)-(-\lambda)-4=0$

$\lambda = 4/5$

$Q \begin{cases} x=8/5 \\ y=-4/5 \\ z=0 \end{cases}$

$Q(8/5, -4/5, 0)$

c) $d(P,r) = \dfrac{|\vec{PP'} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}} = 3/\sqrt{5}$ 4

$\vec{v_r}=(2,-1,0)$

$P'=(2,0,1)$

$P=(0,0,0)$

$\vec{PP'}=(2,0,1)$

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{k}+2\vec{j}+\vec{i}$

$|\vec{PP'} \times \vec{v}| = \sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2} = 3$

Puesto que la distancia obtenida es la mínima (ya que se obtiene la distancia con la proyección ortogonal de P sobre r) la distancia de P a otro punto de la recta será siempre mayor que la calculada.

3 a) $f(x)=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=(x-3)+(x-1)=0$ Decrece: $(-\infty,2)$

$2x-4=0$ Crece: $(2,+\infty)$

$x=2$

$$\begin{array}{c|c} - & + \\ \searrow \; 2 & \nearrow \end{array}$$

b) $(x-1)(x-3)=-(x-1)(x-3)$

$x^2-3x-x+3=-x^2+3x+x-3$

$2x^2-8x+6=0 \quad x=3 \quad x=1$

$$\int_1^3 2x^2-8x+6\,dx=\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}+6x\right]_1^3=0+8/3$$

$=8/3\ u^2$

c) $\int_0^1 a(x-1)(x-3)\,dx=4/3$

$a\int_0^1 x^2-3x-x+3\,dx=a\int_0^1 x^2-4x+3\,dx=$

$=a\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+3x\right]_0^1\right|=4a/3=4/3 \rightarrow a=1$

Opción B

①
$$\left.\begin{array}{l}(1-\alpha)x+(2\alpha+1)y+(2\alpha+2)z=\alpha\\ \alpha x+\alpha y=2\alpha+2\\ 2x+(\alpha+1)y+(\alpha-1)z=\alpha^2-2\alpha+9\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1-\alpha & 2\alpha+1 & 2\alpha+2 & \alpha\\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha+2\\ 2 & \alpha+1 & \alpha-1 & \alpha^2-2\alpha+9\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}_{A} \qquad \underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}_{A'}$$

$|A| = \alpha(1-\alpha)(\alpha-1)+\alpha(\alpha+1)(2\alpha+2)-2\alpha(2\alpha+2)-$

$-\alpha(2\alpha+1)(\alpha-1) = \alpha(\alpha-1-\alpha^2+\alpha)+\alpha(2\alpha^2+2\alpha+2\alpha+2)$

$-\alpha(4\alpha+4)-\alpha(2\alpha^2-2\alpha+\alpha-1) = \alpha(-\alpha^2+2\alpha-1)+$

$\alpha(2\alpha^2+4\alpha+2)-\alpha(4\alpha+4)-\alpha(2\alpha^2-\alpha-1) =$

$= \alpha(-\alpha^2+2\alpha-1+2\alpha^2+4\alpha+2-4\alpha-4-2\alpha^2+\alpha+1) =$

$= \alpha(-\alpha^2+3\alpha-2)=0 \rightarrow \alpha=0 \quad \alpha=2 \quad \alpha=1$

c) $\alpha \neq 0,1,2$

rango $A=3$
rango $A'=3$ → SCD
nº incognitas $=3$

a) $\alpha = 1$ rango $A = 2$ rango $A' = 2$ nº incógnitas $= 3$ SCI

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{8} \end{array}\right)$$

A

A'

$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$ $z = \lambda$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 1-4\lambda \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow y = \dfrac{1-4\lambda}{3} \\ \rightarrow x = 4 - \dfrac{1-4\lambda}{3} = \dfrac{11+4\lambda}{3} \end{array}$$

b) $\alpha = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

A

A'

$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2-10 = -12$

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -26$

rango $A = 2$ rango $A' = 3$ nº incógnitas $= 3 \rightarrow$ SI.

2) $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$

a) $\pi = \begin{cases} \pi // s \\ r \end{cases}$ $\vec{v_s} = \vec{v_\pi} = (2,0,1)$ $\vec{v_r} = \vec{v_\pi} = (1,1,2)$ $A_r = A_\pi = (0,3,2)$ $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 3 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 3 \\ y = -1/3 \\ z = \lambda \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-3 & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2z - 4 + y - 3 - x - 4y + 12 = 0$$

$$-x - 3y + 2z + 5 = 0 \equiv \pi$$

b) $t = \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{V_t} \perp \vec{V_r} \\ \vec{V_t} \perp \vec{V_s} \end{cases}$ $\quad \vec{V_t} = \vec{V_r} \times \vec{V_s}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,3,-2) \qquad t = \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

c) $\sigma \begin{cases} \sigma \perp s \\ r \end{cases}$ Para que exista dicho plano $\vec{V_r}$ y $\vec{V_s}$ deben ser perpendiculares, de modo que debe cumplirse $\vec{V_r} \cdot \vec{V_s} = 0$

$$(1,1,2)\cdot(2,0,1) = 2+2 = 4 \neq 0$$

Como esta condición no se cumple, no puede existir dicho plano.

3

$A(0,4)$

$y = \frac{x^2}{4} \qquad -6 \leq x \leq 6$

$P(x,y)$

a) $d(\vec{PA}) = \sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2} =$

$$= \sqrt{x^2+\left(\frac{x^2}{4}-4\right)^2} = \sqrt{x^2+\frac{x^4}{16}+16-2x^2}$$

$$= \sqrt{\frac{x^4}{16}-x^2+16}$$

b) c) $d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4}{16}-x^2+16}}\left(\frac{4x^3}{16}-2x\right) = 0$

$\frac{x^3}{4} - 2x = 0 \qquad x = 0$

$x^3 - 8x = 0 \qquad x = \pm 2\sqrt{2}$

$x(x^2-8) = 0$

-6		$-2\sqrt{2}$		0		$2\sqrt{2}$		6
	$-$ ↘		$+$ ↗		$-$ ↘		$+$ ↗	

min $(-2\sqrt{2}, 2)$ $\quad$ max $(0,0)$

$(2\sqrt{2}, 2)$