Julio 2017

OPCIÓN A

Problema A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y $2B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que la matriz A es invertible (2 *puntos*)
y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I. (2 *puntos*)

b) Los valores posibles del determinante de B. (3 *puntos*)

c) El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa. (3 *puntos*)

Problema A.2. Se dan la recta $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y + mz = n$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. (3 *puntos*)

b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. (3,5 *puntos*)

c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π. (3,5 *puntos*)

Problema A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes de coordenadas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. (1+2 *puntos*)

b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. (3 *puntos*)

c) Calcular, en función del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$. (2 *puntos*)

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (2 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1}. (2+2 *puntos*)

b) La justificación de que $A^4 = I$. (2 *puntos*)

c) El cálculo de las matrices A^7, A^{30} y A^{100}. (4 *puntos*)

Problema B.2. Se dan la recta $r: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi : 2x - y + bz = 0$, siendo a y b dos parámetros reales. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$. (2,5 *puntos*)

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$. (2,5 *puntos*)

c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b. (5 *puntos*)

Problema B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ y $B = (0, y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo T en función de x. (3 *puntos*)

b) El valor de x para el que dicha área es máxima. (5 *puntos*)

c) El valor de dicha área máxima. (2 *puntos*)

Julio 2017

Opción A

1) $A^2 = -A - I \qquad 2B^3 = B \qquad A_{3\times3} \qquad B_{3\times3}$

a) ¿Existe A^{-1}?

$A^2 + A = -I$

$-A^2 - A = I$

$A(-A - I) = I$

$A \cdot A^{-1} = I$

$A^{-1} = -A - I$

$A^3 = A \cdot A^2 = A(-A-I) = -A^2 - A =$

$= (A + I) - A = I$

b) $|2B^3| = |B|$

$2^3 |B|^3 = |B|$

$8|B|^3 - |B| = 0$

$|B|(8|B|^2 - 1) = 0$

$|B| = 0$

$8|B|^2 - 1 = 0$

$|B| = \pm\sqrt{1/8}$

c) $|B|^2 = \left(+\sqrt{1/8}\right)^2 = 1/8$

$|B|^2 = \left(-1/\sqrt{8}\right)^2 = 1/8$

No cogemos el valor $|B| = 0$ porque sabemos que tiene inversa.

2

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x + y + mz = n \qquad \vec{n} = (2, 1, m)$$

$x = \lambda$

$$\begin{cases} -2y - 2z = 1 - \lambda \\ 3y - z = 1 - \lambda \end{cases} \qquad \left|\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 1-\lambda \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{array}\right|$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1+\lambda+2-2\lambda}{2+6} = \frac{1-\lambda}{8}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{8} = \frac{-2+2\lambda-3+3\lambda}{8} = \frac{-5+5\lambda}{8}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\lambda \\ z = \frac{-5}{8} + \frac{5}{8}\lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A = (0, 1/8, -5/8) \\ \vec{v} = (1, -1/8, 5/8) \end{array}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 + 1(-1/8) + m(5/8) = 15/8 + 5m/8 = 0 \rightarrow m = -3$$

a) • $m \neq -3$ $\quad \vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0 \rightarrow$ la recta y el plano son secantes

c) • $m = -3$ $\quad A \in \pi \rightarrow 2 \cdot 0 + 1/8 - 3 \cdot (-5/8) = n \rightarrow n = 2$

La recta y el plano son coincidentes

b) • $m = -3$ $\quad n \neq 2 \rightarrow$ La recta y el plano son paralelos

3 $y = x^3 \quad y = ax \quad f(x) = x^3 - ax \quad a > 0$

a) • $x = 0 \to f(x) = 0$ $\quad (0,0) \quad (-\sqrt{a}, 0) \quad (\sqrt{a}, 0)$

$f(x) = 0 \to 0 = x^3 - ax$ $\quad$ Puntos de corte

$0 = x(x^2 - a)$

$0 = x$

$\pm\sqrt{a} = x$

• $f'(x) = 3x^2 - a = 0 \to x = \pm\sqrt{a/3}$

$$\begin{array}{ccccc} \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ + & & - & & + \\ \hline & -\sqrt{a/3} & & \sqrt{a/3} & \end{array}$$

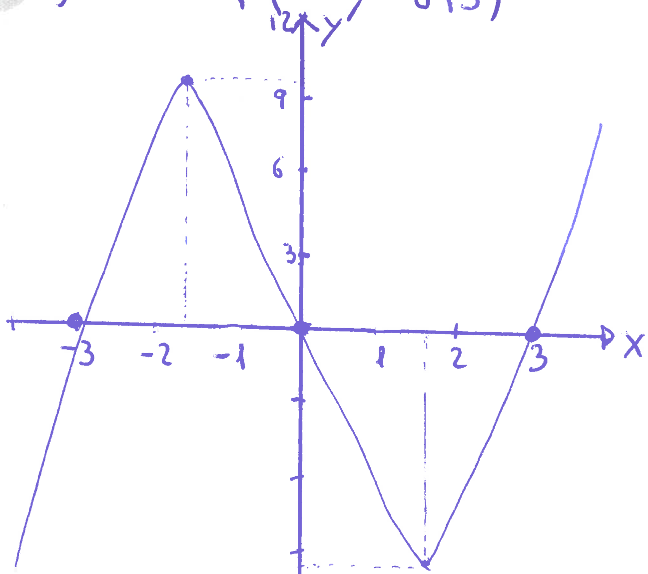
Crece: $(-\infty, -\sqrt{a/3}) \cup (\sqrt{a/3}, +\infty)$ Decrece $(-\sqrt{a/3}, \sqrt{a/3})$

b) $a = 9$

Puntos de corte: $(0,0)$, $(-3,0)$, $(3,0)$

crece: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ Decrece $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$\text{máx}_r \, (-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ $\quad \text{min}_r \, (\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$



c) $x^3 - ax = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{a} \to \text{no está en el I cuadrante} \\ x = \sqrt{a} \end{cases}$

$$\int_0^{\sqrt{a}} x^3 - ax \, dx = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a}} \right| = \left| \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right| = \frac{a^2}{4} u^2$$

d) $\displaystyle\int_0^2 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4 \qquad \frac{a^2}{4} = 4 \to a = 4$

Opción B

1. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $A^{-1} = ?$ $\qquad A^{-1} = \dfrac{A_{adj}^{T}}{|\Delta|}$

$|\Delta| = 1 \neq 0 \rightarrow$ tiene inversa $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Delta_{adj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A_{adj}^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^4 = I$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c) $A^7,\ A^{30},\ A^{100}$

$$A^7 = A^4 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{30} = (A^4)^7 \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = (A^4)^{25} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 $\quad r \equiv \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z-1}{-1} \qquad \pi \equiv 2x - y + bz = 0$

a) $r \equiv \begin{cases} x = 4\lambda + 1 \\ y = a\lambda \\ z = -\lambda + 1 \end{cases} \xrightarrow[b=-1]{a=1} 2(4\lambda+1) - (\lambda) - (-\lambda+1) = 0$

$8\lambda + 2 - \lambda + \lambda - 1 = 0 \qquad \lambda = -1/8$

$x = 4(-1/8) + 1$
$y = 1(-1/8) \qquad P(1/2, -1/8, 9/8)$
$z = -(-1/8) + 1$

b) $d(r, \pi) = ?? \quad d(P, \pi) = \dfrac{|AP_1 + BP_2 + CP_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|2\cdot 1 - 1\cdot 0 + 4\cdot 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2}}$

$a = b = 4$

$= \dfrac{6}{\sqrt{21}}\ u$

c) Posición r y π $\{a, b\}$

$r = \begin{cases} A(1,0,1) \\ \vec{v}(4, a, -1) \end{cases} \qquad \pi = \{ \vec{n}(2, -1, b)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 8 - a - b = 0 \quad \rightarrow a = 10$

$A \in \pi \Rightarrow 2\cdot 1 - 0 + b = 0 \rightarrow b = -2$

$\begin{cases} a \neq 10 \rightarrow r \text{ y } \pi \text{ secantes} \\ a = 10 \quad b \neq -2 \rightarrow r \text{ y } \pi \text{ paralelos} \\ a = 10 \quad b = -2 \rightarrow r \text{ y } \pi \text{ coincidentes} \end{cases}$

3

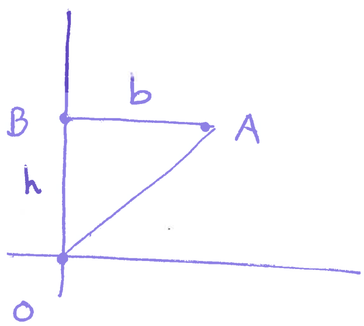
T: $O(0,0)$

$A(x,y)$ $\quad x>0$

$B=(0,y)$ $\quad y>0$

$OA + AB = 30$

a)



a) $$A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{-60x+900}}{2}$$

$$b = d(\overrightarrow{AB}) = \sqrt{(0-x)^2+(y-y)^2} = x$$

$$h = d(\overrightarrow{OB}) = \sqrt{(0-0)^2+(y-0)^2} = y$$

$$d(\overrightarrow{OA}) = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$d(\overrightarrow{AB}) = x$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + x = 30 \rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (30-x)^2$$

$$x^2+y^2 = 900 - 60x + x^2$$

$$y^2 = -60x + 900$$

$$y = \sqrt{-60x+900}$$

b) $$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-60x+900} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-60}{2\sqrt{-60x+900}} = 0$$

$$\frac{\sqrt{-60x+900}}{2} - \frac{15x}{\sqrt{-60x+900}} = 0$$

$$\frac{(-60x+900) - 30x}{2\sqrt{-60x+900}} = 0$$

$$-90x + 900 = 0$$

$$x = 10 \text{ m}$$

$+$ $\quad$ $-$

10

c) $A(10) = 86'60 \text{ m}^2$