Junio 2017

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$, dependiente del parámetro real a.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $a = 2$. (3 *puntos*)

b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. (3 *puntos*)

c) El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a. (2+2 *puntos*)

Problema A.2. Se dan el punto $P = (1, 1, 1)$, la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : x + y + z = 1$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, las ecuaciones de:

a) El plano que contiene al punto P y a la recta r. (2 *puntos*)

b) La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π, la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π. (2+2+2 *puntos*)

c) El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. (2 *puntos*)

Problema A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P, cuando $0 \le x \le 18$. (3 *puntos*)

b) El valor de x, con $0 \le x \le 18$, para el que el costo total C es mínimo. (4 *puntos*)

c) El valor de dicho costo total mínimo. (3 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3×3, *(2,5 puntos)*

y el cálculo de la matriz C^4. *(2,5 puntos)*

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1. *(3 puntos)*

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $BB = B$. *(2 puntos)*

Problema B.2. Sea T un tetraedro de vértices $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 0, 0)$ y $C = (0, 3, 0)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C, *(1 punto)*
y las ecuaciones de la recta h_O perpendicular a π que pasa por O. *(2 puntos)*

b) El punto de intersección de la altura h_O y el plano π. *(3 puntos)*

c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos A, B y C, *(2 puntos)*
y el volumen del tetraedro T. *(2 puntos)*

Problema B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f, *(2 puntos)*
y los extremos relativos de la función f. *(1 punto)*

b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. *(3 puntos)*

c) El área de la región plana limitada por la curva $y = \dfrac{x^2+1}{x}$, $1 \le x \le e$, el segmento que une los puntos $(1, 0)$ y $(e, 0)$, y las rectas $x = 1$ y $x = e$. *(4 puntos)*

Junio 2017

Opción A

1

$$\left.\begin{array}{l} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{array}\right\}$$

a) $a=2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$ $|\Delta| = -27$

$|\Delta|$, A'

$$\left.\begin{array}{l} \text{rango } A = 3 \\ \text{rango } A' = 3 \\ \text{n° incógnitas} = 3 \end{array}\right\} \to SCD$$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = 2/3 \qquad y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = 2/3$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = 2/3$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & -1 & 2 & a \end{array}\right)$

A, A'

$$|\Delta| = -2a - a^2 - 4 - 2a^2 + 1 - 4a =$$

$$= -3a^2 - 6a - 3 = 0 \qquad a = -1$$

Si $a \neq -1$
$$\left.\begin{array}{l} \text{rango } A = 3 \\ \text{rango } A' = 3 \\ \text{n° incógnitas} = 3 \end{array}\right\} \to SCD$$

c) $a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \end{array}\right)$$

rango $A = 2$
rango $A' = 2$
nº incógnitas $= 3$

$\rightarrow$ SCI

$x = \lambda$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -1+\lambda \\ -1 & -1 & 2-2\lambda \end{array}\right) \qquad |\Delta| = 3$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} -1+\lambda & 2 \\ 2-2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1-\lambda-4+4\lambda}{3} = \frac{-3+3\lambda}{3} = \lambda - 1$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1+\lambda \\ -1 & 2-2\lambda \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2+2\lambda-1+\lambda}{3}$$

$$z = \frac{3\lambda - 3}{3} = \lambda - 1$$

2 $P(1,1,1)$ $\quad r \equiv \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ $\quad \pi \equiv x+y+z=1$

$\vec{n}_\pi = (1,1,1)$

a) $\sigma \begin{cases} P \\ r \end{cases}$

$\downarrow$

$x = \lambda$

$$\begin{cases} y - z = -1-\lambda \\ 2y - z = +1-\lambda \end{cases} \qquad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1-\lambda \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{array}\right|$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1+\lambda+1-\lambda}{-1+2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{1} = 1-\lambda+2+2\lambda = \lambda + 3$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda + 3 \end{cases} \qquad A = (0,2,3) \qquad \vec{v}_r = (1,0,1)$$

$\vec{OP} = (1-0,\ 1-2,\ 1-3) = (1, -1, -2)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -x+1-2y+2+z-1-y+1=0$$

$-x-3y+z+3=0$

b) $s = \begin{cases} P \\ s \perp \pi \end{cases}$ $\quad d(P, \pi) \quad Q \ \times s, \pi$

$\vec{n_\pi} = \vec{V_s} = (1,1,1)$

$$d(P,\pi) = \frac{|AP_1 + BP_2 + CP_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$s = \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 1 \\ z = \lambda + 1 \end{cases}$

$$= \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} u$$

$\lambda+1 + \lambda+1 + \lambda+1 = 1 \rightarrow 3\lambda = -2 \rightarrow \lambda = -2/3$

$Q\left(1/3,\ 1/3,\ 1/3\right)$

c) $\sigma \begin{cases} r \\ \sigma \perp \pi \end{cases}$ $\quad \vec{n_\pi} = \vec{V_\sigma} = (1,1,1)$

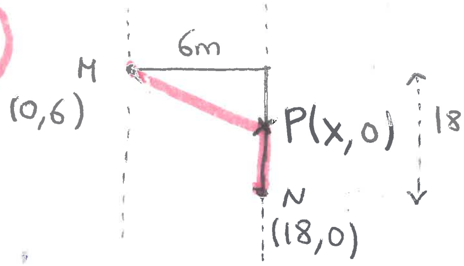
$\vec{V_r} = (1,0,1)$

$A = (0,2,3)$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x + y - 2 - z + 3 - y + 2 = 0 \qquad x - z + 3 = 0$

3



$MP \to 10$ €/m

$PN \to 5$ €/m

a) $d(\vec{MP}) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{x^2+36}$ m

$d(\vec{PN}) = \sqrt{(18-x)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(18-x)^2}$ m

$C(x) = 10\sqrt{x^2+36} + 5(18-x)$ €

b) $C'(x) = 10 \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} + 5(-1) = 0$

$\dfrac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - \dfrac{5\sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}} = 0$

$10x = 5\sqrt{x^2+36}$

$(2x)^2 = \left(\sqrt{x^2+36}\right)^2$

$4x^2 = x^2+36$

$3x^2 = 36$

$x^2 = 12$

$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3'464$ m

0	−	3'464	+	18
	↘		↗	

c) $C(3'464) = 141'96$ €

Opción B

1. $C^2 = 2C - I$ $\quad C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) $C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$2C - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$C^4 = C^2 \cdot C^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

b) $\left|(3A^4)\cdot(4A^2)^{-1}\right| = 3^4 |A|^4 \cdot \dfrac{1}{4^4 \cdot |A|^2} = \dfrac{3^4}{4^4} = 81/256$

A_{4x4}

$|A| = -1$

Propiedades
$$\begin{cases} |A\cdot B| = |A||B| \\ |aA| = a^n \cdot |A| \quad A_{nxn} \\ |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \\ |A^n| = |A|^n \end{cases}$$

c) $BB = B$

$B^{-1}BB = B^{-1}B$

$IB = I$

$B = I$

2 $O(0,0,0)$ $A(1,1,1)$ $B(3,0,0)$ $C(0,3,0)$

a) $\pi \{A, B, C\}$ $h_O \left\{ \begin{array}{l} h_O \perp \pi \\ O \end{array} \right.$ $\vec{n_\pi} = \vec{V_{h_O}} = (3,3,3)$

$\vec{AB} = (2,-1,-1)$

$\vec{AC} = (-1,2,-1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = x-1+4z-4+y-1-z+1+2x-2+2y-2=0$$

$\pi \equiv \{3x+3y+3z-9=0\}$ $h_O = \left\{ \begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 3\lambda \end{array} \right.$

b) h_O y π $\cancel{X}$ Q :

$3(3\lambda)+3(3\lambda)+3(3\lambda)-9=0$ $Q=(1,1,1)$

$\lambda = 1/3$

c) Δ triángulo $ABC = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$ $\vec{u}=\vec{AB}$ $\vec{v}=\vec{AC}$ $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$

$A_t = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2+3^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\, u^2$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] \qquad \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{AB} \\ \vec{v} = \vec{AC} \\ \vec{w} = \vec{AO} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \qquad V = 3/2 \ u^3$$

3 $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} \quad x \neq 0$

a) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \quad x = \pm 1$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 1 & \\ \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

Crece: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decrece $(-1, 1)$

$max_r \ (-1, -2) \quad min_r \ (1, 2)$

b) $\underline{AV} \rightarrow x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{0} = \infty$$

$\underline{AH} \rightarrow$ no existe

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$\underline{AO} \rightarrow y = x$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad y = mx + n$$

c) $y = \frac{x^2+1}{x}$ $\quad 1 \leq x \leq e$ $\quad A(1,0)$ y $B(e,0)$ $\quad x=1$
$x=e$

$\vec{AB} = (e-1, 0)$

$$\int_1^e \frac{x^2+1}{x}\,dx = \int_1^e x + \frac{1}{x}\,dx = \left|\left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_1^e\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{e^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\right| = 4'195\ u^2$$