Julio 2018

OPCIÓN A

Problema A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$, donde a es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible (5 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$ (3 *puntos*).
c) La solución del sistema cuando $a = 0$ (2 *puntos*).

Problema A.2. Se tienen el plano $\pi : x - y + z - 3 = 0$, la recta $s : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1,1,1)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta que pasa por A, corta a la recta s y es paralela al plano π (4 *puntos*).
b) El plano que pasa por A, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s (3 *puntos*).
c) Discute si el punto (3,2,1) está en la recta paralela a s que pasa por (5,3,1) (3 *puntos*).

Problema A.3 Consideramos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx\cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$ (2 puntos).
b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. (4 puntos).
c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$ (4 puntos).

OPCIÓN B

Problema B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$ (4 *puntos*).

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ y $BA \neq B$ (2 *puntos*).

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (4 *puntos*).

Problema B.2. Dada la recta r: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases}$ se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r (3 *puntos*).

b) La ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos $(5,0,1)$ y $(4,1,0)$ (4 *puntos*).

c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior (3 *puntos*).

Problema B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de $600\ cm^2$ de área de manera que:
Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R (3 puntos).

b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima (5 puntos).

c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima (2 puntos).

Julio 2018

Opción A

1

$$\left.\begin{aligned} x + y \quad\quad &= 1 \\ (a-1)y + z &= 0 \\ x + ay + (a-1)z &= a \end{aligned}\right\}$$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{array}\right)$ — A (coeficientes), A' (ampliada)

$|A| = (a-1)^2 + 1 - a = a^2 - 2a + 1 + 1 - a$

$= a^2 - 3a + 2$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Si $a \neq 1, 2$ rango $A = 3$, rango $A' = 3$, incógnitas 3 $\rightarrow$ SCD

Si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

rango $A = 2$
rango $A' = 2$ $\rightarrow$ SCI
incógnitas $= 3$

Si $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

rango $A = 2$
rango $A' = 3$ $\rightarrow$ SI
incógnitas $= 3$

b) $a = 1$ $\qquad x = \lambda$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} y = 1-\lambda \\ z = 0 \end{array}$$

c) $a = 0$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)}_{A,\ A'}$$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 1/2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 1/2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2} = 1/2$$

2

$\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$ $\qquad s = \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad A(1,1,1)$

$\vec{n}_\pi (1,-1,1)$

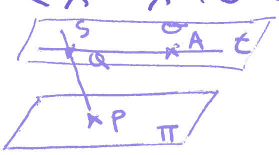
$\downarrow$

a) $t = \begin{cases} A \\ t \text{ y } s \ \times \\ t \parallel \pi \end{cases}$ $\qquad s = \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{array}{l} B = (0,0,0) \\ \vec{v}_s = (2,1,0) \end{array}$

Estudiamos la posición entre s y π.

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 + 1(-1) + 0 \cdot 1 = 1 \neq 0 \rightarrow$ secantes y el punto de intersecci...

$2\lambda - \lambda + 0 - 3 = 0 \qquad \lambda = 3 \qquad P(6,3,0)$



Calculamos el plano σ que pasa por A y es paralelo a π.

$\xrightarrow{\vec{n}_\pi = \vec{n}_\sigma} x - y + z + D = 0 \xrightarrow{A(1,1,1)} 1 - 1 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -1$

$\sigma \equiv x - y + z - 1 = 0$

Calculamos el punto de corte Q entre σ y s.

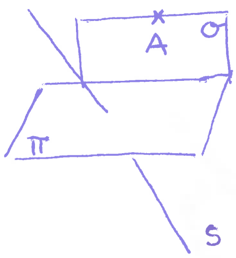
$2\lambda - \lambda + 0 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow Q(2, 1, 0)$

Ahora ya podemos calcular la recta t.

$\vec{AQ} = (1, 0, -1)$

$$t = \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 1 \\ z = -\lambda + 1 \end{cases}$$

b) $\sigma \equiv \begin{cases} A \\ \sigma \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\sigma \perp \vec{n}_\pi \\ \sigma \parallel s \rightarrow \vec{n}_\sigma = \vec{v}_s = (2,1,0) \end{cases} \rightarrow \vec{n}_\sigma = \vec{n}_\pi \times \vec{v}_s$



$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2y - 3z + 4 = 0$$

c) $P(3,2,1)$

$t = \begin{cases} t \parallel s \rightarrow \vec{v}_s = \vec{v}_t = (2,1,0) \\ A(5,3,1) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\lambda + 5 \\ y = \lambda + 3 \\ z = 1 \end{cases} \xrightarrow{P} \begin{matrix} 3 = 2\lambda + 5 \\ 2 = \lambda + 3 \\ 1 = 1 \end{matrix}$

$\boxed{\lambda = -1}$ Efectivamente el punto P pertenece a la recta t, cuando $\lambda = -1$.

3 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx\cos(\pi x)$

a) $f(x) = 22 \quad x = 1 \rightarrow 22 = a + b - c$

b) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\cdot\cos(\pi x) + cx\,(-\text{sen}(\pi x)\cdot\pi)$

$f'(1) = 0$

$0 = 3a + 2b - c.$

c) $\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos(\pi x)\,dx}_{dv} = \left[\frac{x}{\pi}\sin(\pi x) - \frac{1}{\pi}\int \pi\,\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\,dx\right]_0^1 =$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \cos(\pi x)\,dx \qquad V = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$= \left|\left[\frac{x}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right]_0^1\right| = \left|-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2}\right| = \frac{2}{\pi^2}\,u^2$

Opción B

1

a) $AB = A$ $\qquad A^2 = A \qquad B^2 = B$

$BA = B \qquad A \cdot A = A \qquad B \cdot B = B$

$A^2 = A \qquad A \cdot B \cdot A \cdot B = A \qquad B \cdot A \cdot BA = B$

$B^2 = B \qquad A \cdot B \cdot B = A \qquad B \cdot A \cdot A = B$

$A \cdot B = A \qquad BA = B$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \qquad B^2 = B \quad AB \neq A \quad BA \neq B$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a^2 = a \\ a+b = 1 \\ b^2 = b \end{matrix}$$

$$a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \begin{cases} \boxed{a = 0 \rightarrow b = 1} \\ a = 1 \rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a \neq 1$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow b \neq 0$$

c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$

a) $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$

$C_1 = C_2 + C_3$

b) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{0}$

$= 3$

2

$$r = \begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases}$$

a) $r \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=4-3\lambda \end{cases}$

b) $\pi \parallel r \quad A(5,0,1) \quad B(4,1,0)$

$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1,-1,-3)$

$\vec{AB} = (4-5,\ 1-0,\ 0-1) = (-1,1,-1)$

$$\begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

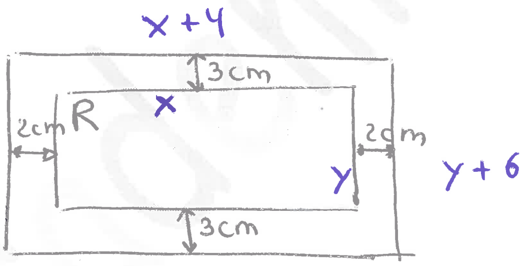
$+x-5+z-1+3y-z+1+3x-15+y=0 \rightarrow 4x+4y-20=0$

c) $d(r,\pi) = d(P,\pi) = \dfrac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{|\vec{n}|} = \dfrac{|4\cdot 0+4\cdot 3+0\cdot 4-20|}{\sqrt{4^2+4^2+0^2}}$

$\vec{n}_\pi = (4,4,0)$

$P = (0,3,4) \qquad = \dfrac{8}{\sqrt{32}} = \sqrt{2}\ u$

3



$R = 600\,cm^2$

a) $600 = x\cdot y \longrightarrow y = \dfrac{600}{x}$

$A = (x+4)(y+6) \rightarrow A = (x+4)\left(\dfrac{600}{x}+6\right)$

$A = \dfrac{600x}{x} + 6x + \dfrac{2400}{x} + 24 \rightarrow$

$A = \dfrac{2400}{x} + 6x + 624$

b) $A'(x) = -\dfrac{2400}{x^2} + 6 = 0 \rightarrow x = 20$

$$\begin{array}{ccc} & - & + \\ 0 & 20 & \\ & \searrow & \nearrow \end{array}$$

c) $x+4 = 20+4 = \underline{24\,cm} \qquad y = \dfrac{600}{20} = 30 \qquad y+6 = \underline{\underline{36\,cm}}$