

Junio 2018

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$$
, donde a es un parámetro

real. Se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado (2 puntos).
- b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$ (4 puntos).
- c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado (4 puntos).

Problema A.2. Dados los puntos $A(-1,2,\lambda)$, $B(2,3,5)$ y $C(3,5,3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C (3 puntos).
- b) El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$ (4 puntos).
- c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$ (3 puntos).

Problema A.3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$ (2 puntos).
- b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ (4 puntos).
- c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ (4 puntos).

OPCIÓN B

Problema B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$ (3 puntos).
- b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$ (4 puntos).
- c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2 (3 puntos).

Problema B.2. Dados el punto $A(5,7,3)$ y la recta $r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La recta s que corta a la recta r , pasa por el punto A , y es perpendicular a la recta r (4 puntos).
- b) La distancia del punto A a la recta r (3 puntos).
- c) La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π que pasa por $(3, -1, 0)$ y es perpendicular a r (3 puntos).

Problema B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x , se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \leq x \leq 100$ (4 puntos).
- b) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor (3 puntos).
- c) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido (3 puntos).

Junio 2018

Opción A

①

$$\left. \begin{array}{rcl} y - z & = & 1 - a \\ -x + z & = & 5 \\ -ax + y - z & = & 1 \end{array} \right\}$$

$$a) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1-a \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ -a & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Δ

Δ'

$$|\Delta| = 1 - a - 1 = -a = 0$$

Si $a \neq 0$ rango $A = 3$ rango $A' = 3$ n° incógnitas = 3 $\rightarrow$ SC D

Si $a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 1$$

rango $A = 2$

rango $A' = 2$

n° incógnitas = 3

$\rightarrow$ SC I

$$b) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$|\Delta| = -a = -3$$

$$x = \frac{|\Delta_x|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = -1$$

$$y = \frac{|\Delta_y|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = 2$$

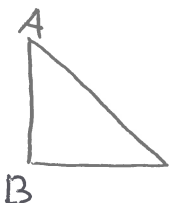
$$z = \frac{|\Delta_z|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = 4$$

c) $x = \lambda$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5+\lambda \end{array} \right) \rightarrow y - (5+\lambda) = 1 \rightarrow y = 6 - \lambda$$

$$\rightarrow z = 5 + \lambda$$

② $A(-1, 2, \lambda) \quad B(2, 3, 5) \quad C(3, 5, 3)$

a) 

$$\vec{u} = \overrightarrow{BA} = (-3, -1, \lambda - 5) \quad \vec{u} \perp \vec{v} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (1, 2, -2) \quad -3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (\lambda - 5)(-2) = 0$$

$$-5 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{5}{2}$$

b) $\lambda = 6 \quad A(-1, 2, 6)$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{BA} = (-3, -1, 1)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (1, 2, -2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{j} + \vec{k} - 2\vec{i} - 6\vec{j} = -5\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$A_{\triangle} = \frac{5\sqrt{2}}{2} u^2$$

c) $\sigma = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -5y - 5z + 40 = 0$$

Como el plano contiene al triángulo, ya tenemos dos vectores directores calculados anteriormente y un punto

3

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

a) $x^2 - x = 0$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 1$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{0, 1\}$$

ΔV

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \quad x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \quad x = 1$$

ΔH

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0 \quad y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0 \quad y = 0$$

ΔO

No existe.

b) $f'(x) = \frac{-(2x-1)}{(x^2-x)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

crece $(-\infty, \frac{1}{2})$ decrece $(\frac{1}{2}, \infty)$

c) $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2-x} dx = \left| \left[-\ln x + \ln(x-1) \right]_2^3 \right| = 0.28842$

$$\int \frac{1}{x^2-x} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} dx = \int -\frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -\ln x + \ln(x-1) + C$$

$$\frac{A(x-1) + Bx}{x^2-x} = \frac{1}{x^2-x}$$

$$\begin{aligned} Ax + Bx - Ax &= 0x \rightarrow A + B = 0 \\ +A &= -1 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

Opción B

$$\textcircled{1} \quad A^2 + 2A = 3I$$

$$a) \quad A^{-1} = aA + bI$$

$$A(A + 2I) = 3I$$

$$A\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I\right) = I$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$$

$$a = 1/3 \quad b = 2/3$$

$$b) \quad A^4 = \alpha A + \beta I$$

$$A^2 = 3I - 2A$$

$$A^2 \cdot A^2 = \alpha A + \beta I$$

$$A^2(3I - 2A) = \alpha A + \beta I$$

$$3A^2 - 2A^3 = \alpha A + \beta I$$

$$3(3I - 2A) - 2 \cdot A \cdot A^2 = \alpha A + \beta I$$

$$9I - 6A - 2A(3I - 2A) = \alpha A + \beta I$$

$$9I - 6A - 6A + 4A^2 = \alpha A + \beta I$$

$$9I - 12A + 4(3I - 2A) = \alpha A + \beta I$$

$$9I - 12A + 12I - 8A = \alpha A + \beta I$$

$$-20A + 21I = \alpha A + \beta I$$

$$\alpha = -20 \quad \beta = 21$$

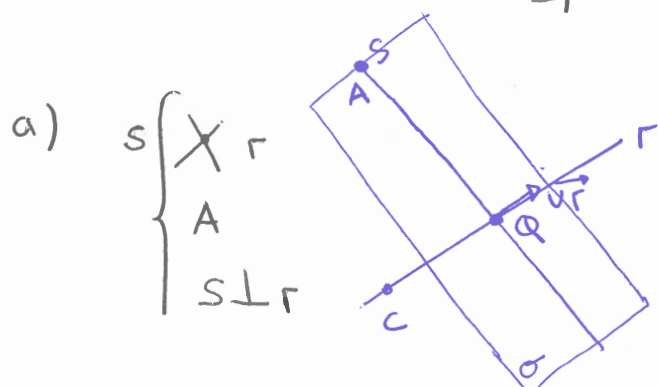
$$c) \quad |B| = 2 \quad |2B^{-1}| = 2^3 \cdot \frac{1}{|B|} = 4$$

 $B_{3 \times 3}$


$$\text{Propiedades: } \begin{cases} |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} \\ |2B| = 2^n |B| \text{ con } B_{n \times n} \end{cases}$$

$$|2B| = 2^n |B| \text{ con } B_{n \times n}$$

② $A(5, 7, 3) \quad r = \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2} \quad \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 3, 2) \\ C = (3, -1, 0) \end{cases}$



$$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Calculamos el plano σ : $\begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n}_\sigma \\ A \end{cases} \quad -x + 3y + 2z - 22 = 0$

$$-x + 3y + 2z + D = 0 \xrightarrow{A} -5 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + D = 0 \rightarrow D = -22$$

Calculamos el punto Q: $-(3-\lambda) + 3(-1+3\lambda) + 2(2\lambda) - 22 = 0$

$$-3 + \lambda - 3 + 9\lambda + 4\lambda - 22 = 0 \quad \lambda = 2 \quad Q(1, 5, 4)$$

Calculamos la recta s: $\Delta Q(-4, -2, 1)$

$$s \begin{cases} x = -4\lambda + 5 \\ y = -2\lambda + 7 \\ z = \lambda + 3 \end{cases}$$

$$b) d(A, r) = \frac{|\vec{P}^1 P \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{7\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \sqrt{21} \text{ u}$$

$$\vec{v}_r = (-1, 3, 2)$$

$$A = (5, 7, 3) \quad C = (3, -1, 0) \quad \vec{AC} = (-2, -8, -3)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 7i - 7j + 14k$$

$$|\vec{AC} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2 + 14^2} = 7\sqrt{6} \quad |\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$c) B(1, 1, 1) \quad \pi = \begin{cases} A(3, -1, 0) \\ \pi \perp r \end{cases} \quad \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (-1, 3, 2)$$

$$d(B, \pi) = ?$$

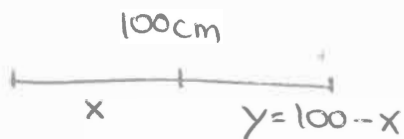
$$-x + 3y + 2z + D = 0 \xrightarrow{A} -3 + 3(-1) + 2 \cdot 0 + D = 0$$

$$D = 6$$

$$\pi \equiv -x + 3y + 2z + 6 = 0$$

$$d(B, \pi) = \frac{|A_1 P_1 + B_1 P_2 + C_1 P_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} \text{ u}$$

3



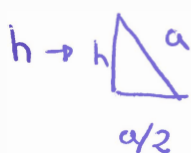
a) $A_t + A_c = f(x): 0 \leq x \leq 100$

$$A_t = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{\frac{x}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{36}$$

$$A_c = b^2 = \left(\frac{100-x}{4} \right)^2$$

$$x = 3a \rightarrow a = \frac{x}{3}$$

$$100 - x = 4b \rightarrow b = \frac{100-x}{4}$$



$$h^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 = a^2$$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}$$

$$h = \sqrt{3} \cdot \frac{x/3}{2}$$

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

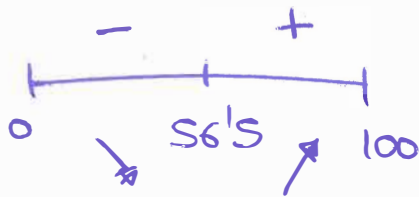
$$d(x) = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{36} + \left(\frac{100-x}{4} \right)^2$$

$$b) f'(x) = \frac{2\sqrt{3}x}{36} + 2\left(\frac{100-x}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}x}{18} - \frac{100-x}{8} = 0$$

$$\frac{4\sqrt{3}x}{72} - \frac{900-9x}{72} = 0 \rightarrow 4\sqrt{3}x + 9x = 900$$

$$(4\sqrt{3} + 9)x = 900$$

$$x = \frac{900}{4\sqrt{3} + 9} = 56'5 \text{ cm}$$



$$c) f(0) = 625 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{La función alcanza el máximo valor en } x=0.$$

$$f(100) = 481'13 \text{ cm}^2$$