OPCIÓN A JUNIO 2019

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *puntos*)

Problema A.2. Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s. (3 *puntos*)

b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. (4 *puntos*)

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$. (3 *puntos*)

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 *puntos*)

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 *puntos*)

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punto*)

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + z &= 4 \\ 3x + 4y + 5z &= 5 \\ 7x + 9y + 11z &= \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 *puntos*)

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 *puntos*)

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. (4 *puntos*)

b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C. (2 *puntos*)

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 *puntos*)

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. (4 *puntos*)

c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. (4 *puntos*)

Junio 2019

Opción A

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$ $\quad B^2 = \frac{1}{3} I - 2B \quad$ B (orden 3)

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = a(a+1) - 2a(a-1) + 3a(a+1) - 2(a-1) =$

$= a^2 + a - 2a^2 + 2a + 3a^2 + 3a - 2a + 2 = 2a^2 + 4a + 2 = 0$

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = -1$$

Si $a \neq -1$ el rango de $A = 3$.

Si $a = -1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ el rango $A = 2$

$a = 1 \quad |2A^{-1}| = 2^3 \cdot \frac{1}{8} = 1$

$|A| = 2a^2 + 4a + 2 = 8$

Propiedades $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$|kA| = k^n |A|$ con $A_{n \times n}$

b) $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad a = -1 \Rightarrow$ SCI

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)}_{A'}$$

(A = the first three columns)

rango $A \to 2$ $\quad$ rango $A' \to 2$ $\quad$ incógnitas $\to 3$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 6 + 2 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

$x = \lambda$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2+2\lambda \\ -2 & -1 & 3\lambda \end{array}\right) \begin{array}{l} \to z = \dfrac{2+2\lambda}{2} = 1+\lambda \\ \to -2y-(1+\lambda) = 3\lambda \end{array}$$

$$y = \frac{2\lambda+1}{-2} = -\lambda - \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda - 1/2 \\ 1+\lambda \end{pmatrix}$$

c) $B^{-1} = mB + nI$ $\quad \begin{cases} m=3 \\ n=6 \end{cases}$

$B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$

$B^2 + 2B = \frac{1}{3} I$

$3B^2 + 6B = I$

$B(3B+6I) = I$

$\downarrow B \cdot B^{-1} = I$

$B^{-1} = 3B + 6I$

2

$r = \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ $\qquad s = \quad x = y+1 = \dfrac{z-2}{2}$

a) $r = \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ $\quad x = \lambda \quad y = \lambda + 3 \quad z = 2\lambda + 3$

$\vec{v}(1, 1, 2) \quad A(0, 3, 3)$

$s = \vec{w}(1, 1, 2) \quad B(0, -1, 2)$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \to F_2 = F_1$

$\overrightarrow{AB} = (0-0, -1-3, 2-3) = (0, -4, -1)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$

rango $M = 2$ y $\vec{v} = \vec{w} \to$ son rectas paralelas.

Por lo tanto tenemos dos vectores directores

$\vec{v}(1,1,2)$ y $\vec{AB}=(0,-4,-1)$ y un punto $P(0,3,3)$

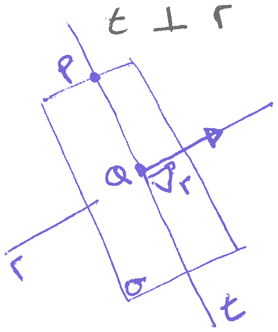
$$\begin{vmatrix} x-0 & y-3 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 7x+y-4z+9=0$$

$$-x-4z+12+8x+y-3=0$$

b) $P(0,-1,2)$

$t=??$

$t \perp r$



Construimos el plano que pasa por P y es perpendicular a r.

$\vec{n}=\vec{v}(1,1,2)$

$$x+y+2z+D=0$$
$$0-1+2\cdot 2+D=0$$
$$D=-3$$

$$\sigma: x+y+2z-3=0$$

Calculamos el punto de corte entre r y σ.

$$r\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda+3 \\ z=2\lambda+3 \end{cases}$$

$$\lambda+\lambda+3+2(2\lambda+3)-3=0$$
$$6\lambda+6=0$$
$$\lambda=-1$$

$x=-1$
$y=2$
$z=1$
$Q(-1,2,1)$

La recta t es la que pasa por P y Q.

$\overrightarrow{PQ} = (-1,3,-1)$ $\qquad t = \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3\lambda - 1 \\ z = -\lambda + 2 \end{cases}$

c) Para que la recta s esté contenida en el plano π, se debe cumplir $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad A \in \pi$.

$s = \begin{cases} \vec{v} = (1, 1, 2) \\ A = (0, -1, 2) \end{cases} \qquad \pi = \vec{n}(1, -2, a)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2a = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$

$x - 2y + \frac{1}{2} z = b \xrightarrow[A(0,-1,2)]{} 0 - 2(-1) + \frac{1}{2} \cdot 2 = b \rightarrow b = 3$

3 $\quad f(x) = x e^{-x^2}$

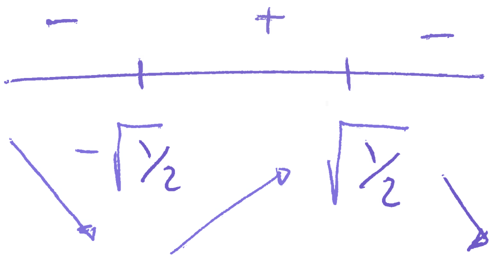
a). $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \rightarrow$ No tiene asíntota vertical

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal $y = 0$

Como existe asíntota horizontal, no existe asíntota oblicua.

- $f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}[1 - 2x^2] = 0$

$e^{-x^2} = 0 \rightarrow x = \nexists \qquad 1 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$



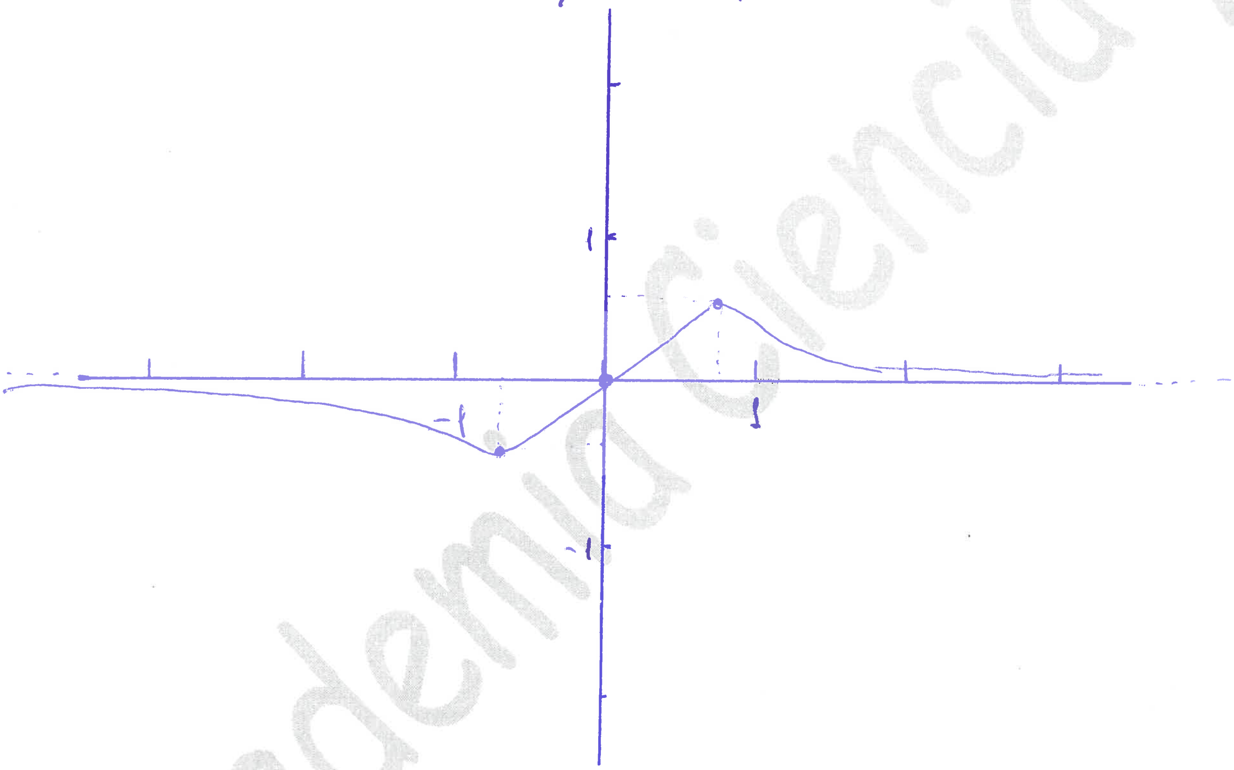
$min_r \left(-\sqrt{1/2}, -0'429\right)$

$máx_r \left(\sqrt{1/2}, 0'429\right)$

Crece : $\left(-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}\right)$ Decrece $\left(-\infty, -\sqrt{1/2}\right) \cup \left(\sqrt{1/2}, +\infty\right)$

b) Puntos de corte: $x=0 \quad y=0$

$y=0 \quad x=0$ $(0,0)$



c) $[0,1]$ $g(x)=f(x)+ax \rightarrow$ Teorema de Rolle $a=??$

$g(x)= xe^{-x^2}+ax$

• $g(x) \rightarrow$ Es continua y derivable en el intervalo $[0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=0 \\ g(1)=e^{-1}+a \end{array}\right\} 0=e^{-1}+a$$

$$\boxed{a=-e^{-1}}$$

• Para que se cumpla el teorema de Rolle se debe cumplir $g(0)=g(1)$

d) $\int f(x)\,dx = \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2} + C$

$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-x}\,dx}_{dv} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x\cdot e^{-x} - e^{x} + C$

$u = x \quad du = dx$

$dv = e^{-x}\,dx \quad v = -e^{-x}$

Opción B

1.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+11z=\alpha \end{array}\right\}$$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array}\right)$ with A the coefficient part and A' the whole matrix.

$|\Delta| = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \\ \alpha & 9 & 11 \end{vmatrix} = \alpha - 14 = 0 \qquad \alpha = 14$$

rango $A = 2$

si $\alpha = 14$ rango $A' = 3$ rango $A = 2$ SI

si $\alpha \neq 14$ rango $A' = 2$ rango $A = 2$ SC
incógnitas $= 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 7 & 14 & 11 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

b) $x = \lambda$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4-\lambda \\ 4 & 5 & 5-3\lambda \end{array}\right)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 5-3\lambda & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{20-5\lambda-5+3\lambda}{1} = 15-2\lambda$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-\lambda \\ 4 & 5-3\lambda \end{vmatrix}}{1} = 5-3\lambda-16+4\lambda = \lambda - 11$$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & k & \alpha \end{array}\right)$ $\quad |\Delta| = k-11 = 0 \quad k = 11$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\Delta}$ $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\Delta'}$

si $k \neq 11$ rango $A = 3$
SCD. rango $A' = 3$
incógnitas $= 3$

si $k = 11$ en función del parámetro α que hemos visto anteriormente será SCI o SI.

(2) $\pi : 9x + 12y + 20z = 180$

a) $\sigma = ??$ $\quad \sigma \parallel \pi \quad d(\sigma, \pi) = 4 \quad 9x + 12y + 20z = D$

$\alpha = ??$ $\quad \alpha \parallel \pi \quad d(\alpha, \pi) = 4 \quad 9x + 12y + 20z = D$

$\vec{n_\sigma} = \vec{n_\pi} = \vec{n}_\alpha$

$$d(\sigma, \pi) = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \rightarrow 4 = \frac{|180 - D|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}} \rightarrow 100 = |180 - D|$$

$-100 = 180 - D \qquad 100 = 180 - D$

$D = 280 \qquad D = 80$

$\sigma \equiv 9x + 12y + 20z = 280$

$\alpha \equiv 9x + 12y + 20z = 80$

b) A $\begin{cases} \pi = 9x+12y+20z = 180 \\ z=0 \\ y=0 \end{cases}$ $(20, 0, 0)$

B $\begin{cases} \pi \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$ $(0, 15, 0)$

C $\begin{cases} \pi \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $(0, 0, 9)$

$\widehat{\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AC}} = ?$

$\vec{u} \quad \vec{v}$

$\vec{u} = (0-20, 15-0, 0-0) = (-20, 15, 0)$

$\vec{v} = (-20, 0, +9)$

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{(-20)(-20)+15\cdot 0+(0)(+9)}{\sqrt{(-20)^2+15^2+(0)^2}\,\sqrt{(-20)^2+0^2+(+9)^2}} = \frac{400}{25\,\sqrt{481}} = 0'73$$

$\alpha = 43'15^\circ$

c) $V = \frac{1}{6}[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \frac{1}{6}\cdot 2700 = 450\ u^3$

$\overrightarrow{AO} = (20,0,0)$
$\overrightarrow{BO} = (0,15,0)$
$\overrightarrow{CO} = (0,0,9)$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 2700$$

3

$A_i = (0,0) \quad B = (250,0)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$A_f = (0, \frac{375}{2}) \quad B_f = (0,0)$

$v = 30 km/h \quad v = 40 km/h$

$v = \frac{e}{t}$

a) $d(t)$

$A(0, 30t)$

$B(250-40t, 0)$

$\rightarrow \overrightarrow{AB} = (250-40t, -30t)$

$$d(t) = \sqrt{(250-40t)^2 + (-30t)^2} = \sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500} \ km$$

b) $t = \frac{250}{40} = 6'25 \ h.$

$$d'(t) = \frac{1}{2\sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}} \cdot (5000t - 20000) = 0$$

$5000t - 20000 = 0 \rightarrow t = 4h$

$0 \searrow 4 \nearrow 6'25$ ($-$ on $(0,4)$, $+$ on $(4, 6'25)$)

La distancia decrece en el intervalo $(0,4)$ y crece en el intervalo $(4, 6'25)$

c) $d(0) = 250 km$ — La distancia máxima es 250 km, cuando $t = 0 h$

$d(4) = 150 km$ — La distancia mínima es 150 km, cuando $t = 4 h$

$d(6'25) = 187'5 km$