OPCIÓN A JULIO 2019

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x & & +3z = & \alpha \\ x & -2y & +2z = & 5 \\ 3x & -y & +5z = & \alpha+1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

b) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 *puntos*)

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *puntos*)

Problema A.2. Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del punto P al plano π. (3 *puntos*)

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

Problema A.3. Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *puntos*)

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. (2 *puntos*)

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (3 + 2 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (3 *puntos*)

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *puntos*)

Problema B.2. Se dan en el espacio la recta r: $\frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β. (5 *puntos*)

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. (3 *puntos*)

c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π. (2 *puntos*)

Problema B.3. Un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$. (2 *puntos*)

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 *puntos*)

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 *puntos*)

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$. (4 *puntos*)

Julio 2019

Opción A

①
$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{array}\right\}$$

a)
$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \end{array}\right)}_{\Delta'}$$

Δ

Δ'

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

rango $\Delta = 3$ rango $\Delta' = 3$ incógnitas $= 3$

Para cualquier valor de α el sistema es compatible determinado.

b) $\alpha = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-7}{-1} = 7$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

c) $(x, y, z) \longrightarrow x+y+z=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \end{array}\right)$$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = 2\alpha + 9$$ ✓

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & \alpha+1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = -4$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & \alpha+1 \end{vmatrix}}{-1} = -\alpha-6$$

$$(2\alpha+9) + (-4) + (-\alpha-6) = 0$$

$$\alpha = 1$$

② $\pi : 2x + y + 2z = 8$ $P(10, 0, 10)$

a) $$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{|\vec{n}|} = \frac{|2\cdot 10 + 1\cdot 0 + 2\cdot 10 - 8|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{32}{3}u$$

b) $A\begin{cases} \pi = 2x+y+2z=8 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $(0,0,4)$ $B\begin{cases} \pi \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$ $(0,8\ 0)$

$C\begin{cases} \pi \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $(4,0,0)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}\ (0,8,-4)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}\ (4,0,-4)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 8 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -32\vec{i} - 16\vec{j} - 32\vec{k}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{(32)^2 + (-16)^2 + (-32)^2} = 48 \qquad A_t = 48/2 = 24\,u^2$$

c) $\vec{u}=\overrightarrow{PA}=(-10,0,-6)$

$\vec{v}=\overrightarrow{PB}=(-10,8,-10)$

$\vec{w}=\overrightarrow{PC}=(-6,0,-10)$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}-10 & 0 & -6\\ -10 & 8 & -10\\ -6 & 0 & -10\end{vmatrix}=512\,u^3$$

$V=512/6=85.33\ u^3$

③ $$h(x)=\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$$

a) $x^2+2x+5=0$ $\quad x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\nexists$ $\quad D=\mathbb{R}$

No existe ningún número que anule al denominador.

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\frac{\infty}{\infty}=\infty \qquad \lim_{x\to 0} h(x)=\frac{0^3+0^2+5\cdot0-3}{0^2+2\cdot0+5}=-3/5$$

b) En el apartado anterior hemos visto que no puede tener asíntota vertical porque el dominio son todos los reales y tampoco asintota horizontal porque $\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$.

Asíntota oblícua

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x}=\frac{\infty}{\infty}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(h(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}-x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3-x^3-2x^2-5x}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-3}{x^2+2x+5}=-1$$

Ao: $y = mx + n \Rightarrow y = x - 1$

c) $\int h(x)\,dx = \int \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}\,dx = \int x-1+\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx =$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +x^2 & +5x & -3 & x^2+2x+5 \\ \cline{5-5} -x^3 & -2x^2 & -5x & & x-1 \\ \hline / & -x^2 & / & -3 & \\ & +x^2 & +2x & +5 & \\ \cline{2-4} & / & 2x & +2 & \end{array}$$

$= \int x\,dx - \int 1\,dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2+2x+5) + C$

$\int_1^5 h(x)\,dx = \left| \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2+2x+5)\right]_1^5 \right| = \left| \left[\frac{5^2}{2} - 5 + \ln(5^2+2\cdot5+5)\right] - \right.$

$\left. - \left[\frac{1^2}{2} - 1 + \ln(1^2+2\cdot1+5)\right] \right| = 9'6\ u^2$

Opción B

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

a) $AX = \alpha X$

$AX - \alpha X = 0$

$(A - \alpha I) \cdot X = 0$

Para que tenga solución debe existir la inversa de la matriz $(A - \alpha I)$ y para que esto ocurra $|A - \alpha I| \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha)(6-\alpha) + 4 = 6 - \alpha - 6\alpha + \alpha^2 + 4 =$$

$$= \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0 \qquad \alpha = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

Por lo tanto cuando $\alpha \neq 2, 5$ la ecuación matricial tendrá solución.

b) $AX = 5X$

$AX - 5X = 0$

$(A - 5I) \cdot X = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right]$$

$$x = \lambda \quad y = \lambda \rightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

c) $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad AX = 2X \quad$ $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$A^{99}\cdot A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\cdot A^{99}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\cdot A^{98}\cdot A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^{2}\cdot A^{98}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{98\text{veces}}{=} \cdots\cdots$$

$$= 2^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \beta = 2^{100}$$

② $r: \dfrac{x-\alpha}{-1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{\beta}$, $\quad \pi: x + 2y + 3z = 6$

a) De la recta r $\begin{cases} A(\alpha, 0, 0) \\ \vec{v}(-1, -4, \beta) \end{cases}$ Del plano π $\{ \vec{n}(1, 2, 3)$

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = (-1, -4, \beta)(1, 2, 3) = -1 - 8 + 3\beta = -9 + 3\beta = 0 \rightarrow \beta = 3$$

- $\beta \neq 3$ $\quad \vec{v}\cdot\vec{n} \neq 0 \rightarrow$ la recta y el plano son secantes
- $\beta = 3$ $\quad \vec{v}\cdot\vec{n} = 0$

$\alpha + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 6 \rightarrow \alpha = 6$

$$\begin{cases} \beta = 3 \text{ y } \alpha = 6 \quad \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \text{ y} \\ A \in \pi \rightarrow r \text{ y } \pi \text{ son coincidente} \\ \beta = 3 \text{ y } \alpha \neq 6 \quad \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \text{ y} \\ A \notin \pi \rightarrow r \text{ y } \pi \text{ son paralelos} \end{cases}$$

b) $d(r,\pi)=?$

$\alpha=6$
$\beta=3$

Como hemos visto en el apartado anterior, cuando $\alpha=6$ y $\beta=3$ el plano y la recta son coincidentes, por lo tanto, la distancia entre ambos es 0u.

c) $P(0,0,0)$

$\sigma \parallel \pi \rightarrow$ Si no se cortan son paralelos, por lo tanto, se cumple $\vec{n}_\pi=\vec{n}_\sigma$

$\sigma=??$

$$x+2y+3z+D=0 \xrightarrow[\uparrow \atop P(0,0,0)]{} D=0 \rightarrow \sigma: x+2y+3z=0$$

③ $B=(0,2)$

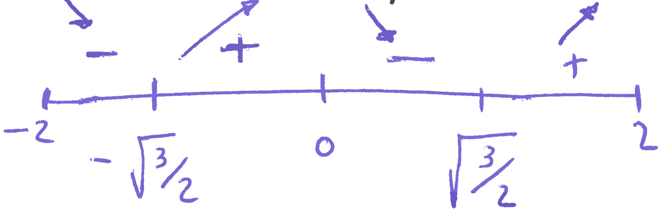
$y=4-x^2$ de $(-2,0)$ a $(2,0)$

a) $A=(x,4-x^2)$ $\quad d(\Delta B)=\sqrt{(0-x)^2+(2-(4-x^2))^2}=\sqrt{x^2+4+x^4-4x^2}$

$$d(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}$$

b) y c) $d'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}}\cdot(4x^3-6x)=0$

$$4x^3-6x=0 \rightarrow 2x(2x^2-3)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3/2} \end{cases}$$



Sustituimos en la originald(x):

$$\min_r\left(-\sqrt{3/2},\ \sqrt{7}/2\right) \quad y \quad \left(\sqrt{3/2},\ \sqrt{7}/2\right)$$

$$\text{máx}_r(0,\ 2)$$

$$(-2,\ 2\sqrt{2})$$

$$(2,\ 2\sqrt{2})$$

La mayor distancia absoluta es $2\sqrt{2}$ y se da en los puntos:

$$\begin{tikzcd} & x=2 \quad y=0 \quad (2,0) \\ y=4-x^2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & x=-2 \quad y=0 \quad (-2,0) \end{tikzcd}$$

La menor distancia absoluta es $\sqrt{7}/2$ y se da en los puntos:

$$\begin{tikzcd} & x=-\sqrt{3/2} \quad y=5/2 \quad \left(-\sqrt{3/2},\ 5/2\right) \\ y=4-x^2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & x=\sqrt{3/2} \quad y=5/2 \quad \left(+\sqrt{3/2},\ 5/2\right) \end{tikzcd}$$

d) $y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 + x & \text{si} \quad -2 \leq x < 0 \\ 2 - x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\qquad y = 4 - x^2$

$4 - x^2 = 2 + x$

$-x^2 - x + 2 = 0$

$x = 1$

$\boxed{x = -2}$

$4 - x^2 = 2 - x$

$-x^2 + x + 2 = 0$

$\boxed{x = 2}$

$x = -1$

$$\int_{-2}^{0} -x^2 - x + 2 \, dx + \int_{0}^{2} -x^2 + x + 2 \, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{0}^{2} =$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \, u^2$$